

Das optische Phasengatter und Beobachtung eines vier-Photonen Cluster-Zustands

DIPLOMARBEIT AN DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK
DER
LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ARBEITSGRUPPE PROF. DR. HARALD WEINFURTER



Ulrich Weber

2. Mai 2005

Erstgutachter: Prof. Dr. Harald Weinfurter

Zweitgutachter: Prof. Dr. Axel Schenzle

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Theorie	7
1.1 Einführung und Definitionen	7
1.2 Verschränkung	9
1.2.1 Zweiteilchen-Verschränkung	11
1.2.2 Verschränkung von mehreren Teilchen	11
1.3 Quantengatter	14
1.3.1 Änderungen in der Verschränkung eines Zustands	14
1.3.2 Prozesstomographie	17
1.3.3 Maße für die Nähe der Gatter-Operation zum idealen Gatter	23
1.4 Cluster-Zustände	24
2 Erzeugung des Cluster-Zustands	33
2.1 Erzeugung der EPR-Paare	35
2.2 Das Phasengatter	40
2.2.1 Eigenschaften des Phasengatters	43
2.2.2 Eigenschaften der Komponenten	47
2.2.2.1 Der Überlappstrahlteiler	48
2.2.2.2 Die Strahlteiler-Plättchen	51
2.2.3 Aufbau und Justage des Phasengatters	53
2.2.4 Eigenschaften des HOM-Dips	60
2.2.5 Prozesstomographie des Phasengatters	64
2.2.5.1 Ergebnisse der Prozesstomographie	64
2.2.5.2 Simulation des Gatters	71

3	Charakterisierung des Cluster-Zustands	81
3.1	Der 4-Qubit-Zustand	81
3.2	Der 3-Qubit-Zustand	88
3.3	Der 2-Qubit-Zustand	91
4	Ausblick	95
5	Zusammenfassung	99
	Literaturverzeichnis	101
	Abbildungsverzeichnis	107
	Tabellenverzeichnis	111
	Danksagung	113

Einleitung

Die Konzepte der Physik prägen schon über viele Jahrhunderte hinweg das Bild von der Welt und ihren Zusammenhängen. So hat beispielsweise die von Einstein entwickelte spezielle Relativitätstheorie das damals sehr intuitive Bild von Zeit und Raum revolutioniert.

Auch die Einführung der Quantenmechanik brachte einen gravierenden Wandel unseres Weltbildes, welcher in einigen Punkten noch bis zum heutigen Tage andauert. Einer der Gründe dafür ist die der Intuition widersprechende Unvereinbarkeit der Quantenmechanik mit der gleichzeitigen Annahme von *Realismus* und *Lokalität*. Diese Unvereinbarkeit äußert sich in einer Verletzung der 1964 von BELL aufgestellten Ungleichung [1] durch sogenannte „verschränkte“ Zustände. Man hat jedoch erkannt, dass die Verschränkung nicht nur grundlegende Fragen zur Interpretation der Physik aufwirft, sondern vielmehr auch als Quelle ungeahnter Möglichkeiten zu sehen ist, die es zu nutzen gilt.

So ist es beispielsweise möglich, Verschränkung in der Quantenkryptographie zur abhörsicheren Übertragung von Nachrichten zu verwenden [2]. Aber auch eine völlig neue Art von Computern, sogenannte „Quantencomputer“, sind denkbar [3], um Aufgaben, die bisher als unlösbar galten, in kurzer Zeit zu bewältigen.

Der Schlüssel zu all diesen Möglichkeiten liegt in der Kontrolle und gezielten Manipulation von quantalen Systemen. Dabei gibt es viele verschiedene Ansätze, die mit unterschiedlichen Möglichkeiten und Schwierigkeiten verbunden sind. Einer davon befasst sich beispielsweise mit Anregungszuständen von Atomen. Einen weiteren möglichen Ansatz, der sich die Quantenmechanische Eigenschaft von Photonen zu Nutze macht, wollen wir in dieser Arbeit verfolgen.

Es ist ein vielversprechender Ansatz, der sich besonders durch die einfache und direkte Art der Manipulations- und Detektions-Möglichkeiten auszeichnet und auch in Hinblick auf die Übertragung von Information über weite Distanzen hinweg ein einzigartiges Potential in sich birgt. Gerade auch durch

die immer stärker optimierte Nutzung der „spontanen parametrischen Fluoreszenz“ [4], die eine einfache Möglichkeit zur Erzeugung von verschränkten Photonenpaaren darstellt, und den Einsatz von „Quantengattern“ [5], welche Verschränkungseigenschaften gezielt beeinflussen können, ist es möglich geworden, verschränkte Zustände auch von mehreren Teilchen zu erzeugen. Dadurch sind wir in der Lage, die von der Quantenmechanik vorausgesagten Eigenschaften dieser Systeme zu überprüfen, neue Anwendungsbereiche für sie zu eröffnen und möglicherweise Antworten auf die, durch die Experimente neu aufgeworfene Frage nach dem grundlegenden Konzept der Verschränkung zu geben.

Das Experiment, das dieser Arbeit zugrunde liegt, vereint gleich mehrere der vorgestellten Themengebiete in sich. Durch die Beobachtung eines *Cluster-Zustands* [6] haben wir einen interessanten Mehr-Teilchen-Zustand gewählt, der sowohl Verschränkungseigenschaften von komplexer Struktur besitzt, als auch große Popularität durch seine Einsatzfähigkeit als „Einweg-Quantencomputer“ gefunden hat. Dabei verwenden wir ein Quantengatter, das ein großes Spektrum an Möglichkeiten bei der Manipulation von verschränkten Zuständen bietet.

Kapitel 1

Theorie

In diesem Kapitel werden wir nach einer knappen Einführung der für diese Arbeit relevanten Größen und Schreibweisen auf Eigenschaften verschränkter Zustände und deren Nachweis eingehen. Wir werden außerdem in Kapitel 1.3 Möglichkeiten kennenlernen, Verschränkung mit Quantengattern zu erzeugen und wieder zu zerstören. Dabei werden wir uns auch mit der Frage beschäftigen, wie wir Quantengatter charakterisieren können. Eine interessante Gruppe von Zuständen, die sich durch Anwendung eines speziellen Gatters – des Phasengatters – erzeugen lässt, sind die *Cluster-Zustände*. Besonders wird uns der 4-Qubit *Cluster-Zustand* beschäftigen, da wir diesen, wie wir in Kapitel 2 sehen werden, mit einem probabilistischen Phasengatter realisieren können.

1.1 Einführung und Definitionen

Zentraler Ausgangspunkt der Quanteninformatik ist das *Qubit*. Es stellt das quantenmechanische Analogon zum Bit dar, kann aber aufgrund seiner quantenmechanischen Natur nicht nur die logischen Werte 0 oder 1 annehmen, sondern auch alle *Superpositionen* der beiden Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad \text{mit} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Um ein Qubit zu realisieren, das ja ein abstraktes Objekt ist, codieren wir die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ in einem beliebigen Zwei-Niveau-System, zum Beispiel in den Polarisationszuständen $|H\rangle$ und $|V\rangle$ des Photons.

Bilden wir die Superposition

$$|+/-\rangle = \frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

so entspricht dieser Zustand einem Photon, das in $\pm 45^\circ$ polarisiert ist. Der Zustand

$$|R/L\rangle = \frac{|0\rangle \pm i|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

repräsentiert rechts- bzw. links-zirkulare Polarisation.

Bei einer Messung an einem Qubit messen wir immer Eigenwerte einer Observablen, die durch einen hermiteschen Operator dargestellt wird. Mögliche Operatoren sind zum Beispiel die Pauli-Matrizen, die zusammen mit der Eins-Operation eine Basis für hermitesche Operatoren bilden:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ihre Eigenvektoren entsprechen den oben definierten Zuständen:

$$\hat{\sigma}_z |H/V\rangle = \pm |H/V\rangle \quad (1.1)$$

$$\hat{\sigma}_x |+/\rangle = \pm |+/\rangle \quad (1.2)$$

$$\hat{\sigma}_y |R/L\rangle = \pm |R/L\rangle \quad (1.3)$$

Der Erwartungswert des Operators $\hat{\sigma}_x$ für einen Zustand $|\psi\rangle$ lautet $\langle\psi|\hat{\sigma}_x|\psi\rangle$. Stellen wir $|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ in der Eigenbasis von $\hat{\sigma}_x$ dar, so erhalten wir

$$\langle\psi|\hat{\sigma}_x|\psi\rangle = (\alpha^*\langle+| + \beta^*\langle-|) \hat{\sigma}_x (\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle) \stackrel{(1.2)}{=} |\alpha|^2 - |\beta|^2.$$

Dadurch entspricht der Erwartungswert von $\hat{\sigma}_x$ dem Erwartungswert einer Messung in der $|+\rangle/|-\rangle$ -Basis, weshalb wir auch von einer Messung in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis sprechen. Gleiches gilt auch für $\hat{\sigma}_y$ und $\hat{\sigma}_z$.

Haben wir zwei beliebige Zustände $|\phi\rangle$ und $|\psi\rangle$ gegeben, so ist es von Interesse, wie stark sich beide voneinander unterscheiden. Um diese Größe zu quantifizieren, definieren wir die *Fidelity* \mathcal{F} :

$$\mathcal{F}(\phi, \psi) = |\langle\phi|\psi\rangle|^2 \quad (1.4)$$

Wir erhalten für identische Zustände $\mathcal{F} = 1$ und $\mathcal{F} = 0$ für orthogonale Zustände.

Bisher haben wir nur so genannte *reine Zustände* behandelt. Nehmen wir als Beispiel den Zustand $|+\rangle$, so werden wir bei einer Messung in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis immer +1 als Ergebnis erhalten. Wechseln wir in die $\hat{\sigma}_z$ -Basis so erhalten wir die Ergebnisse +1 und -1 wegen $\langle+|\hat{\sigma}_z|+\rangle = 0$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit und in zufälliger Reihenfolge. Diese Zufälligkeit ist aber eine prinzipiell andere als die einer Quelle, die in zufälliger Reihenfolge $|0\rangle$ und $|1\rangle$ aussendet, da es bei dieser grundsätzlich möglich wäre zu erfahren, in welcher Reihenfolge $|0\rangle$ und $|1\rangle$ erzeugt werden. Für den Zustand $|+\rangle$ aber existiert der Quantenmechanik zufolge vor einer Messung in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis noch kein festgelegtes Ergebnis. Es ist dadurch auch nicht voraussagbar.

Um aber auch stochastische Wahrscheinlichkeiten, die nicht durch die Quantenmechanik bedingt sind, beschreiben zu können, müssen wir die Darstellungsweise von Zuständen erweitern. Dazu führen wir den Dichteoperator $\hat{\rho}$ ein:

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \quad (1.5)$$

Dabei entspricht p_k der klassischen Wahrscheinlichkeit, den Zustand $|\psi_k\rangle$ vorliegen zu haben. Jeder physikalische Dichteoperator erfüllt folgende Bedingungen:

$$Sp(\hat{\rho}) = 1 \quad (1.6)$$

$$Sp(\hat{\rho}^2) \leq 1 \quad (1.7)$$

$$Sp(\hat{\rho}^2) = 1 \Leftrightarrow \hat{\rho} \text{ ist ein reiner Zustand} \quad (1.8)$$

Auch aus $\hat{\rho}$ können wir alle, für reine Zustände definierten Größen berechnen, wie zum Beispiel den Erwartungswert einer Observablen \hat{A} oder die *Fidelity* \mathcal{F} :

$$\text{Erwartungswert:} \quad \langle \hat{A} \rangle_{\hat{\rho}} = Sp(\hat{A} \hat{\rho}) \quad (1.9)$$

$$\text{Fidelity:} \quad \mathcal{F}(\hat{\rho}_A, \hat{\rho}_\psi) = \left(Sp(\sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_\psi} \hat{\rho}_A \sqrt{\hat{\rho}_\psi}}) \right)^2 \quad (1.10)$$

Wir haben bisher nur 1-Qubit-Zustände betrachtet. Wir wollen nun zu Mehr-Qubit-Zuständen übergehen.

1.2 Verschränkung

Um auch Zustände $|\psi\rangle$ beschreiben zu können, die aus mehreren Qubits $|Q_1\rangle, |Q_2\rangle, \dots$ bestehen, erweitern wir den Zustandsraum über das Tensorprodukt \otimes auf folgende Weise:

$$|\psi\rangle = |Q_1\rangle \otimes |Q_2\rangle \otimes \dots = |Q_1 Q_2 \dots\rangle$$

Dabei wird $|\psi\rangle$ auch als *separabel* bezeichnet, da er als Produkt aus 1-Qubit-Zuständen geschrieben werden kann. Allgemein ist das jedoch nicht für jeden Mehr-Qubit-Zustand möglich. Ein Beispiel dafür ist der Zustand $|\phi^+\rangle$, der eine Superposition aus den separablen Zuständen $|00\rangle$ und $|11\rangle$ ist. Zustände, die nicht separabel sind, heißen *verschränkt*.

$$|\phi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \neq |a\rangle \otimes |b\rangle \Rightarrow \text{verschränkt}$$

Es stellt sich nun die Frage, wie wir die Verschränkung eines Zustands $|\psi\rangle$ messen können und welche Eigenschaften verschränkte Zustände aufweisen. Als erster Ansatz bietet es sich an, bei einer Messung an einem Zustand

die Korrelationen \mathcal{K} zwischen den Messergebnissen zu betrachten, da sie eine dem Experimentator zugängliche Größe sind. $\mathcal{K} = 1$ soll perfekte Korrelation und $\mathcal{K} = -1$ perfekte Antikorrelation bedeuten. Für einen 2-Qubit-Zustand $|\psi\rangle$ können wir die Korrelationen \mathcal{K} einfach als Erwartungswert eines Korrelations-Operators \hat{K} schreiben:

$$\mathcal{K} = \langle \psi | \hat{K} | \psi \rangle, \quad \text{wobei} \quad \hat{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$$

Dabei haben wir den Korrelations-Operator so gewählt, dass wir für zwei gleiche Messergebnisse (00 oder 11) $\mathcal{K} = 1$ und für zwei gegensätzliche Ergebnisse (01 oder 10) $\mathcal{K} = -1$ erhalten. Offensichtlich lässt sich \hat{K} mit dieser Definition auch als Kombination der Pauli-Matrix $\hat{\sigma}_z$ ausdrücken. Dadurch entspricht die Korrelation direkt dem Erwartungswert einer Messung in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis. Um Korrelation auch für Mehr-Qubit-Zustände angeben zu können, wo ihre Bedeutung nicht mehr intuitiv klar ist, verallgemeinern wir den 2-Qubit-Ansatz auf folgende Weise:

$$\mathcal{K} = \langle \psi | \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \dots \hat{\sigma}_z | \psi \rangle = Sp \left((\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \dots \hat{\sigma}_z) \hat{\rho} \right). \quad (1.11)$$

Wählen wir als Beispiel den 2-Qubit-verschränkten Zustand $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$, so erhalten wir perfekte Antikorrelation:

$$\mathcal{K} = \langle \psi^- | \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z | \psi^- \rangle = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

Vergleichen wir das mit dem separablen, gemischten Zustand $\hat{\rho}_k = \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)$, so sind auch hier die Messergebnisse perfekt antikorreliert:

$$\mathcal{K} = Sp(\hat{K} \hat{\rho}_k) = Sp \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = -1$$

Führen wir aber einen Basiswechsel in die $\hat{\sigma}_x$ -Basis durch, mit

$$|0\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad |1\rangle = \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}},$$

so erhalten wir für den Zustand $|\psi^-\rangle$ immer noch perfekte Antikorrelation, während $\hat{\rho}_k$ sämtliche Korrelation verliert ($\mathcal{K} = 0$).

$$|\psi^-\rangle \xrightarrow{\text{Basiswechsel}} \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \mathcal{K} = -1 \quad (1.12)$$

$$\hat{\rho}_k \xrightarrow{\text{Basiswechsel}} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{K} = 0 \quad (1.13)$$

Um zu entscheiden, ob ein Zustand verschränkt ist oder nicht, ist es demnach notwendig, die Korrelationen in mindestens zwei unterschiedlichen Basen zu betrachten.

1.2.1 Zweiteilchen-Verschränkung

Diese Erkenntnis wurde von BELL zur Formulierung einer Ungleichung für 2-Qubit-Zustände verwendet, die ursprünglich die Richtigkeit quantenmechanischer Vorhersagen experimentell überprüfbar machen sollte. Dabei werden die Korrelationen in verschiedenen Basen so kombiniert, dass diese Ungleichung von jedem nicht-verschränkten Zustand erfüllt werden muss. Wir führen dazu an jedem der beiden Qubits Messungen in zwei speziellen, zustandsabhängigen Basen \mathbf{A} und \mathbf{a} für Qubit eins sowie \mathbf{B} und \mathbf{b} für Qubit zwei durch. Für jeden separablen Zustand gilt dann:

$$\mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + \mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) + \mathcal{K}(\mathbf{a}, \mathbf{B}) - \mathcal{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq 2 \quad (1.14)$$

Eine Verletzung dieser Ungleichung kann nur mit einem verschränkten Zustand erreicht werden. Insofern ist eine BELL-Ungleichung als Verschränkungskriterium geeignet:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} \text{ separabel} &\Rightarrow \hat{\rho} \text{ verletzt keine BELL-Ungleichung} \\ \hat{\rho} \text{ verletzt eine BELL-Ungleichung} &\Rightarrow \hat{\rho} \text{ ist verschränkt} \end{aligned}$$

Historisch und philosophisch gesehen hat die von BELL 1964 veröffentlichte Ungleichung [1] jedoch weitaus größere Bedeutung [7, 8, 9, 10] als die eines Verschränkungskriteriums.

Es existieren eine Reihe weiterer interessanter Verschränkungskriterien, wie zum Beispiel das PPT-Kriterium [11, 12, 13], Spur-Kriterium [14] oder Eigenwert-Kriterium [15], auf die wir hier aber nicht näher eingehen möchten. Wir werden anstatt dessen unsere Überlegungen zur Verschränkung auf mehr als zwei Teilchen ausdehnen.

1.2.2 Verschränkung von mehreren Teilchen

Beim Versuch, das Konzept der Verschränkung auf mehrere Teilchen zu erweitern, stoßen wir als erstes auf die Frage, wie Verschränkung hier überhaupt zu definieren ist. Dabei ist beispielsweise wichtig anzugeben, welches Teilchen mit welchem verschränkt ist. Ein Beispiel ist in Abbildung 1.1 gegeben. Zustand a) hat die biseparable Form $|0\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle)$, während

Zustand b) eine echte 3-Teilchen-Verschränkung aufweist, da er nicht separabel ist. Die *Separabilität* eines Mehr-Teilchen-Zustands $\hat{\rho}_s$ bedeutet, dass er als Summe von Produkten geschrieben werden kann:

$$\hat{\rho}_s = \sum_i p_i \hat{\rho}_i^{(1)} \otimes \hat{\rho}_i^{(2)} \iff \hat{\rho}_s \text{ separabel}$$

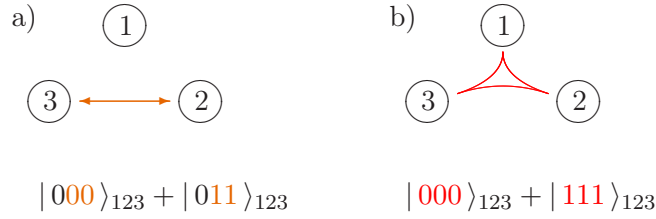


Abbildung 1.1: Unterschiedliche Arten der Verschränkung für Systeme von drei Qubits: a) biseparabler Zustand $|1(23)\rangle$, b) echte 3-Teilchen Verschränkung $|123\rangle$.

Um echte Mehr-Qubit-Verschränkung nachweisen zu können, benötigen wir ein Kriterium, welches uns erlaubt n-Teilchen-verschränkte Zustände von den separablen Zuständen abzugrenzen. Eine Methode, diese Unterscheidung vorzunehmen, ist die Verwendung eines Operators \hat{W} , der auch *Verschränkungs-Zeuge* genannt wird [16, 17, 18, 19, 14]:

$$\hat{\rho} \text{ verschränkt} \iff \begin{aligned} \exists \hat{W} : Sp(\hat{W}\hat{\rho}) < 0 \quad \text{und} \\ \forall \hat{\rho}_s : Sp(\hat{W}\hat{\rho}_s) \geq 0 \quad \text{mit } \hat{\rho}_s \text{ separabel} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Ein Zustand $\hat{\rho}$ ist also verschränkt, falls wir einen *Verschränkungs-Zeugen* \hat{W} finden, der für alle separablen Zustände $\hat{\rho}_s$ einen nichtnegativen Erwartungswert hat, für $\hat{\rho}$ aber einen negativen. Für diese Aussage existiert auch eine anschauliche, geometrische Interpretation (Abbildung 1.2), welche im folgenden Absatz beschrieben wird.

Die Menge aller $\hat{\rho}$ mit der Eigenschaft $Sp(\hat{W}\hat{\rho}) = 0$ legt eine Hyperebene im Zustandsraum fest, die alle Zustände $\hat{\rho}$ mit $Sp(\hat{W}\hat{\rho}) > 0$ von denen mit negativem Erwartungswert trennt. Gelingt es uns, einen *Verschränkungs-Zeugen* zu finden, für den alle separablen Zustände $\hat{\rho}_s$ einen positiven Erwartungswert haben, so ist ein negativer Erwartungswert für einen Zustand $\hat{\rho}$ ein hinreichendes Verschränkungskriterium. Da der Raum der separablen Zustände konvex ist [20], können wir für jeden beliebigen, verschränkten Zustand $\hat{\rho}$ einen zugehörigen *Verschränkungs-Zeugen* $\hat{W}_{\hat{\rho}}$ finden. Dies ist jedoch im Allgemeinen keine triviale Aufgabe.

Wie wir in Kapitel 3 sehen werden, kann der Erwartungswert von \hat{W} bei einigen Zuständen schon durch wenige lokale Messungen, das heißt durch

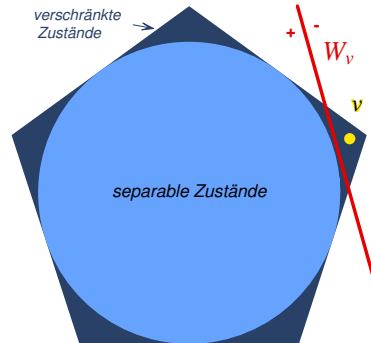


Abbildung 1.2: Geometrische Interpretation des *Verschränkungs-Zeugen* \hat{W}_v als Hyperebene, die den konvexen Raum der separablen Zustände vom verschränkten Zustand \hat{v} trennt.

Messungen an einzelnen Qubits, bestimmt werden. Das liegt daran, dass jeder \hat{W} als Summe von Operatoren darstellbar ist, deren Erwartungswert durch lokale Messungen bestimmt werden kann. Dabei entspricht die Anzahl der Summanden der Anzahl von Messungen, die wir an einem experimentellen Zustand durchführen müssen. Falls es gelingt, durch eine geschickte Wahl von \hat{W} und seiner Operator-Zerlegung die Anzahl der Summanden auf „wenige“ zu reduzieren, so kann die Verschränkung des Zustands schon mit einer kleinen Anzahl von Messungen gezeigt werden [18]. Aus diesem Grund sind *Verschränkungs-Zeugen* zu einem wichtigen Werkzeug für den experimentellen Nachweis von Mehr-Qubit-Verschränkung geworden.

Für echte mehr-Qubit-verschränkte Zustände hat es sich als sinnvoll erwiesen, verschiedene Zustände voneinander zu unterscheiden, die sich nicht durch Transformationen an einzelnen Qubits ineinander überführen lassen. Diese weisen unterschiedliche Verschränkungseigenschaften auf, zu denen wir zum Beispiel die Anzahl der Qubits zählen, die mindestens verloren gehen müssen, um die Verschränkung vollständig zu zerstören. Diese *Beständigkeit* der Verschränkung ist unabhängig von der Basis, in der wir den jeweiligen Zustand darstellen, und damit eine interessante Eigenschaft des Zustands [21], die äquivalent zur *Persistency* [6] ist. Mathematisch entspricht ein Verlust von Teilchen der Bildung der partiellen Spur über das entsprechende Qubit.

Nehmen wir als Beispiel die beiden 3-Qubit-verschränkten Zustände $|GHZ_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$ und $|W_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$. Bilden wir die partielle Spur über eines der drei Qubits, so erhalten wir aus dem GHZ_3 -Zustand immer ein Gemisch zweier separabler Zustände. Aus dem W_3 -Zustand dagegen erhalten wir einen Zustand, der $|\psi^+\rangle$ enthält und

deshalb verschränkt ist. Die beiden Zustände gehören darum verschiedenen Verschränkungsklassen an:

$$\begin{aligned} |GHZ_3\rangle & \xrightarrow{\text{part. Spur}} \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \quad \text{separabel} \\ |W_3\rangle & \xrightarrow{\text{part. Spur}} \frac{1}{3}|00\rangle\langle 00| + \frac{2}{3}|\psi^+\rangle\langle\psi^+| \quad \text{verschränkt} \\ & \text{mit } |\psi^+\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass es für drei Qubits genau zwei derartige Klassen von echter 3-Qubit-Verschränkung gibt [22]. Mit zunehmender Qubit-Zahl wird die Klassifikation jedoch immer komplexer [23] und stellt ein noch nicht vollständig verstandenes Gebiet der Quanteninformation dar.

Bisher haben wir uns mit dem Nachweis und der Klassifikation von Verschränkung beschäftigt. Wir wollen nun einen Schritt weiter gehen und die Möglichkeit untersuchen, Verschränkung mit Hilfe von Quantengattern gezielt zu erzeugen oder zu zerstören.

1.3 Quantengatter

Wie in der binären Logik, wo logische Gatter auf Bits wirken, gibt es für quantenmechanische Zustände Quantengatter, die eine Operation auf den Qubits ausführen. Da der Zustandsraum für Qubits aber eine ganz andere Struktur hat, als der von Bits, weil er auch Superpositionen mehrerer Zustände zulässt, gibt es deutliche Unterschiede in der Wirkungsweise und der Darstellung. Wir wollen im Folgenden Quantengatter als eine Abbildung \hat{Q} betrachten, für die gilt:

$$\hat{Q}: \hat{Q}(\hat{\rho}) \longrightarrow \hat{\rho}' \quad \hat{\rho}, \hat{\rho}' \in \mathcal{H}_{\hat{\rho}}$$

Interessant sind dabei vor allem Gatter, die die Verschränkungseigenschaften von Zuständen verändern, also beispielsweise einen separablen Zustand in einen verschränkten transformieren und umgekehrt. Neben den Eigenschaften solcher Quantengatter wird uns insbesondere auch die Frage nach deren allgemeiner Beschreibung beschäftigen. Dies ist gerade auch im Hinblick auf die Analyse eines experimentell realisierten Quantengatters wichtig, bei dem uns interessiert, wie gut es der theoretischen Vorlage entspricht.

1.3.1 Änderungen in der Verschränkung eines Zustands

Wie bereits angesprochen, ist es mit Hilfe von Quantengattern möglich, Verschränkung in separablen Zuständen zu erzeugen oder in verschränkten Zuständen zu zerstören. Dabei stellt sich die Frage, welche Eigenschaften ein Quantengatter haben muss, dass es entsprechende Operationen durchführt.

Da sich Verschränkung immer in Korrelationen zwischen zwei oder mehreren Qubits ausdrückt, ändert sich die Verschränkung eines Zustands nicht, wenn wir nur lokale Transformationen auf einzelne Qubits durchführen. Wir benötigen Operationen, die mehrere Qubits betreffen, um quantenmechanische Korrelationen zwischen ihnen zu erzeugen.

Solche Operationen werden beispielsweise von einem Gatter durchgeführt, das keine Operation auf dem zweiten Qubit ausführt wenn sich das erste (control) Qubit im Zustand $|0\rangle$ befindet, im anderen Fall aber eine $N\hat{O}T$ -Operation auf dem Zustand des zweiten (target) Qubits durchführt. Dieses Gatter wird auch als kontrolliertes $N\hat{O}T$ -Gatter ($CN\hat{O}T$) bezeichnet. Wenden wir dieses Gatter auf den separablen Zustand $|+0\rangle = |00\rangle + |10\rangle$ an,

Eingang			Ausgang	
control	target	\longrightarrow	control	target
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	\longrightarrow	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	\longrightarrow	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	\longrightarrow	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	\longrightarrow	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$

Tabelle 1.1: Transformation des $CN\hat{O}T$ -Gatters.

so erhalten wir gemäß Tabelle 1.1 den verschränkten Zustand $|00\rangle + |11\rangle$.

Auch das kontrollierte Phasengatter, das eine Phase von π erzeugt falls sich beide Qubits im Zustand $|1\rangle$ befinden, kann die Verschränkung eines Zustands verändern. Es hängt, wie wir später noch sehen werden, eng mit dem $CN\hat{O}T$ zusammen. In Matrix-Schreibweise haben beide Gatter folgende Form:

$$\text{CN}\hat{\text{O}}\text{T-Gatter} \quad \text{CN}\hat{\text{O}}\text{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

$$\text{Phasengatter} \quad \hat{P}G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Das Phasengatter transformiert beispielsweise den separablen Zustand $|++\rangle$, gemäß

$$\begin{aligned} \hat{P}G|++\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0+\rangle + |1-\rangle = |\phi_{\odot}^+\rangle) \end{aligned} \quad (1.18)$$

in einen verschränkten Zustand. Bei nochmaliger Anwendung des Gatters erhalten wir wieder einen separablen Zustand. Das Gatter kann also Verschränkung erzeugen und wieder zerstören.

Wie können wir nun ein nicht-perfektes Gatter, wie es zum Beispiel einer experimentellen Realisation entspricht, beschreiben?

Nehmen wir dazu einmal an, wir möchten ein Gatter \hat{G} beschreiben, das mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit eine CNOT-Operation auf dem Zustand $|\psi\rangle$ ausführt und in den restlichen Fällen den Zustand einfach unverändert lässt.

$$|\psi\rangle \longrightarrow \boxed{\hat{G}} \begin{array}{l} \xrightarrow{\alpha} \text{CNOT}|\psi\rangle \\ \xrightarrow{\beta} |\psi\rangle \end{array}$$

Wir suchen also eine unitäre Transformation \hat{G} , die unser Beispiel korrekt beschreibt. Ein naheliegender Ansatz ist

$$\hat{G} = \alpha \text{CNOT} + \beta \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

Verbinden wir diesen Ansatz mit der Bedingung $\hat{G}\hat{G}^\dagger = \hat{\mathbb{1}}$, so erhalten wir zwei unabhängige Gleichungen

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad \text{und} \quad |\alpha + \beta|^2 = 1,$$

die nur die beiden Lösungen $\alpha = 1, \beta = 0$ für das perfekte CNOT-Gatter und $\alpha = 0, \beta = 1$ für die $\hat{\mathbb{1}}$ -Operation zulassen. Es ist also offensichtlich nicht möglich, unser Beispiel mit einer unitären Transformation darzustellen.

Gerade auch weil wir mit unitären Transformationen U

$$U : U|\psi\rangle \longrightarrow |\phi\rangle$$

für reine Eingangszustände $|\psi\rangle$ immer nur reine Ausgangszustände $|\phi\rangle$ erhalten, benötigen wir ein allgemeineres Konzept der Gatterbeschreibung, das auch gemischte Zustände erlaubt. Darum schreiben wir die unitäre Transformation U für den Dichteoperator $\hat{\rho}$ auf

$$\hat{\rho} \longrightarrow U \hat{\rho} U^\dagger$$

und erweitern sie in eine Linearkombination unitärer Transformationen. Die gesamte Transformation \hat{Q} hat dann folgende Form:

$$\hat{Q}(\hat{\rho}) = \sum_i \lambda_i U_i \hat{\rho} U_i^\dagger \quad (1.19)$$

Auf diese Weise können wir in der Tat jedes beliebige Gatter darstellen, wobei wir für Gatter mit polarisationsabhängiger Absorption die Unitarität der U_i aufgeben müssen.

Auf dem Weg zur Charakterisierung realer Quantengatter benötigen wir allerdings noch ein Verfahren um alle λ_i und U_i zu bestimmen. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, wie dies mit Hilfe der Prozesstomographie erreicht werden kann.

1.3.2 Prozesstomographie

Wie gehen wir vor, um ein beliebiges Quantengatter \hat{Q} auf möglichst einfache Weise so zu beschreiben, dass wir in der Lage sind, für jeden beliebigen Eingangszustand $\hat{\rho}$ den zugehörigen Ausgangszustand $\hat{\rho}'$ zu bestimmen?

$$\hat{\rho} \longrightarrow \boxed{\hat{Q}} \longrightarrow \hat{\rho}'$$

Als erstes halten wir fest, dass \hat{Q} als Abbildung im linearen Hilbertraum selbst auch linear \hat{Q} ist.

Wir wählen also eine beliebige Basis $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{\mathcal{B}}_1, \hat{\mathcal{B}}_2, \dots, \hat{\mathcal{B}}_k\}$ für den Raum der Eingangszustände, wodurch wir jeden Zustand $\hat{\rho}$ als Linearkombination darstellen können.

$$\hat{\rho} = \sum_i \lambda_i \hat{\mathcal{B}}_i \quad (1.20)$$

Aus der Linearität von \hat{Q} folgt dann, dass wir die Gatter-Transformation für jeden beliebigen Eingangszustand beschreiben können, falls wir alle transformierten Basiszustände

$$\hat{\mathcal{B}}_i' = \hat{Q}(\hat{\mathcal{B}}_i) \quad (1.21)$$

kennen. Dies können wir experimentell erreichen, indem wir als Eingangszustände $\hat{\rho}$ nacheinander $\hat{\rho} = \hat{\mathcal{B}}_i$ präparieren und eine Zustandstomographie [24] des zugehörigen $\hat{\rho}'$ durchführen.

Anschließend können wir jeden beliebigen Eingangszustand $\hat{\rho}$ transformieren, indem wir $\hat{\rho}$ in $\hat{\mathcal{B}}_i$ zerlegen, die Transformation der $\hat{\mathcal{B}}_i$ rechnerisch

durchführen, weil die Ergebnisse $\hat{\mathcal{B}}_i'$ aus der Zustandstomographie bekannt sind und dann alle $\hat{\mathcal{B}}_i'$ wieder zum Zustand $\hat{\rho}'$ zusammensetzen.

$$\hat{\rho} = \left\{ \begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{B}}_1 & \longrightarrow & \boxed{\hat{\mathcal{Q}}} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{B}}_1' \\ \hat{\mathcal{B}}_2 & \longrightarrow & & \longrightarrow & \hat{\mathcal{B}}_2' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hat{\mathcal{B}}_k & \longrightarrow & & \longrightarrow & \hat{\mathcal{B}}_k' \end{array} \right\} = \hat{\rho}'$$

Mathematisch können wir diesen Gedanken folgendermaßen formulieren:

$$\hat{\mathcal{Q}}(\hat{\rho}) \stackrel{(1.20)}{=} \hat{\mathcal{Q}}\left(\sum_i \lambda_i \hat{\mathcal{B}}_i\right) \stackrel{(\hat{\mathcal{Q}} \text{ lin.})}{=} \sum_i \lambda_i \hat{\mathcal{Q}}(\hat{\mathcal{B}}_i) \stackrel{(1.21)}{=} \sum_i \lambda_i \hat{\mathcal{B}}_i' = \hat{\rho}' \quad (1.22)$$

Dabei können wir die transformierten Basiszustände $\hat{\mathcal{B}}_i'$ in der von der Transformation unabhängigen Basis $\hat{\mathcal{B}}_j$ darstellen, was sich später noch als nützlich erweisen wird.

$$\hat{\mathcal{Q}}(\hat{\mathcal{B}}_i) = \hat{\mathcal{B}}_i' = \sum_j \mu_{ij} \hat{\mathcal{B}}_j \quad (1.23)$$

Wir wollen nun kurz der Frage nach der notwendigen Anzahl der zu bestimmenden Parameter nachgehen. Um einen beliebigen n-Qubit Eingangszustand $\hat{\rho}$ beschreiben zu können, brauchen wir im Allgemeinen $k = 2^{2n}$ Basiszustände. Beispiele für mögliche Basen sind:

$$\underbrace{\hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_r \otimes \cdots}_k \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}_{0\dots 3} = \{\hat{\mathbb{1}}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}, \quad (1.24)$$

$$\underbrace{|\alpha_j\rangle\langle\alpha_j| \otimes |\alpha_r\rangle\langle\alpha_r| \otimes \cdots}_k \quad \text{mit} \quad \alpha_{0\dots 3} = \{H, V, +, R\} \quad (1.25)$$

Die Dichtematrix $\hat{\rho}'$ des Ausgangszustands wird dabei durch $2^{2n} - 1$ reelle Parameter beschrieben, denn die $k = 2^{2n}$ Koeffizienten einer Basiszerlegung, wie sie beispielsweise in den Gleichungen (1.24) und (1.25) dargestellt ist, werden zusätzlich durch die Bedingung $Sp(\hat{\mathcal{B}}_i') = 1$ eingeschränkt. Die Gesamtzahl der zu bestimmenden freien Parameter (Tabelle 1.2) beträgt also:

$$\mathcal{N}_{Parameter} = 2^{2n} \times (2^{2n} - 1) \quad (1.26)$$

Da wir nun in der Lage sind, für jeden beliebigen Eingangszustand $\hat{\rho}$ den zugehörigen Ausgangszustand $\hat{\rho}'$ zu bestimmen, fehlt nur noch die Verbindung zur Darstellung von Gattern, die wir am Anfang dieses Abschnitts behandelt hatten. Wir hatten in Gleichung (1.19) gesehen, dass sich eine allgemeine nicht-unitäre Gatter-Transformation $\hat{\mathcal{Q}}$ als Linearkombination unitärer Transformationen schreiben lässt:

$$\hat{\mathcal{Q}}(\hat{\rho}) = \sum_i \lambda_i U_i \hat{\rho} U_i^\dagger \quad \forall \hat{\rho}$$

Qubits	Basiszustände	$\mathcal{N}_{Parameter}$
1	4	12
2	16	240
3	64	4032
4	256	65280
\vdots	\vdots	\vdots
n	2^{2n}	$2^{2n}(2^{2n}-1)$

Tabelle 1.2: Anzahl der freien Parameter $\mathcal{N}_{Parameter}$ zur Beschreibung eines n-Qubit-Gatters.

Da wir jedoch daran interessiert sind, die Gatter-Operation in einer beliebigen, vom Gatter unabhängigen Basis darzustellen, drücken wir U in der neuen Basis \hat{E}_m aus und erhalten mit $U_i = \frac{1}{\sqrt{\chi_i}} \sum_m a_{im} \hat{E}_m$:

$$\hat{Q}(\hat{\rho}) = \sum_{m,l} \underbrace{\sum_i a_{im} a_{il}^*}_{\chi_{ml}} \hat{E}_m \hat{\rho} \hat{E}_l^\dagger = \sum_{m,l} \chi_{ml} \hat{E}_m \hat{\rho} \hat{E}_l^\dagger \quad \forall \hat{\rho} \quad (1.27)$$

Für ein n-Qubit Quantengatter ist $\chi = \chi_{ml} = \sum_i a_{im} a_{il}^*$ dabei eine komplexe hermitesche Matrix mit Dimension $2^{2n} \times 2^{2n}$, die wegen ihrer Hermitizität mit $2^{2n} \times (2^{2n} - 1)$ reellen Parametern beschrieben werden kann. Damit enthält sie genau so viele unabhängige Parameter wie wir nach Gleichung (1.26) benötigen, damit sie alle Informationen über das Quantengatter enthalten kann. Um χ zu bestimmen, setzen wir den aus Gleichung (1.23) bekannten Ausdruck

$$\hat{Q}(\hat{\mathcal{B}}_i) = \hat{\mathcal{B}}_i' = \sum_j \mu_{ij} \hat{\mathcal{B}}_j,$$

mit Formel (1.27) gleich. Die Basen \hat{E}_m und $\hat{\mathcal{B}}_i$ können dabei selbst gewählt werden und sind deshalb natürlich bekannt, ebenso wie μ_{ij} , das alle Informationen der Zustandstomographien enthält.

$$\sum_j \mu_{ij} \hat{\mathcal{B}}_j \stackrel{(1.23)}{=} \hat{Q}(\hat{\mathcal{B}}_i) \stackrel{(1.27)}{=} \sum_{m,l} \chi_{ml} \hat{E}_m \hat{\mathcal{B}}_i \hat{E}_l^\dagger \quad (1.28)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist jedoch nicht trivial, weshalb wir spezielle Basen $\hat{\mathcal{B}}_i$ und \hat{E}_l wählen, um das Problem zu vereinfachen. Auf die genaue Herleitung [5] zur Berechnung von χ werden wir nicht eingehen, da sie in diesem Zusammenhang zu keinem weiteren Erkenntnisgewinn beiträgt. Um aber ein Beispiel anzugeben, demonstrieren wir das Verfahren für ein 2-Qubit-Gatter.

Nehmen wir dazu an, wir haben für die Prozesstomographie des 2-Qubit-Gatters die 16 Eingangszustände $\hat{\rho}_i$

$|HH\rangle\langle HH|, |HV\rangle\langle HV|, |H+\rangle\langle H+|, |HR\rangle\langle HR|, |VH\rangle\langle VH|, \dots$
präpariert, also alle Kombinationen aus $\{H, V, +, R\}$ und jeweils eine Zustandstomographie von $\hat{Q}(\hat{\rho}_i) = \hat{\rho}_i'$ durchgeführt mit den Ergebnissen

$$\underline{\rho}'^{(HH)}, \underline{\rho}'^{(HV)}, \underline{\rho}'^{(H+)}, \underline{\rho}'^{(HL)}, \underline{\rho}'^{(VH)}, \dots$$

Um die Rechnungen einfacher zu gestalten, wählen wir als Eingangs-Basis

$$\hat{\mathcal{B}}_i = \hat{\xi}_i = \{ \underline{\xi}^{(11)}, \underline{\xi}^{(12)}, \underline{\xi}^{(13)}, \underline{\xi}^{(14)}, \underline{\xi}^{(21)}, \underline{\xi}^{(22)}, \dots, \underline{\xi}^{(44)} \}$$

wobei die Matrizen $\underline{\xi}^{(bc)} = \delta_{bm}\delta_{cl}$ nur eine „1“ an der Stelle ($b_{\text{Zeile}}, c_{\text{Spalte}}$) besitzen und sonst nur aus Nullen bestehen.

$$\text{z.B. } \underline{\xi}^{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\xi}^{(23)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots$$

Für die Operator-Basis \hat{E}_i wählen wir Kombinationen aus den Pauli-Matrizen $\{\hat{1}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$, also:

$$\hat{E}_1 = \hat{1} \otimes \hat{1} \quad \hat{E}_2 = \hat{1} \otimes \hat{\sigma}_x \quad \hat{E}_3 = \hat{1} \otimes \hat{\sigma}_y \quad \hat{E}_4 = \hat{1} \otimes \hat{\sigma}_z \quad \hat{E}_5 = \hat{\sigma}_x \otimes \hat{1} \quad \dots$$

Da wir anstatt der Basiszuständen $\hat{\mathcal{B}}_i = \hat{\xi}_i$ die viel einfacher zu präparierenden $\hat{\rho}_i = \{ |HH\rangle\langle HH|, |HV\rangle\langle HV|, |H+\rangle\langle H+|, \dots \}$ als Eingangszustände verwendet haben, müssen wir noch eine zusätzliche Basis-Transformation durchführen, um die gemessenen Dichtematrizen $\hat{\rho}'$ in der Basis $\hat{\mathcal{B}}_i$ darzustellen. Nachdem wir die inverse Transformationsmatrix T_{ij} aus

$$T_{ij}^{-1} = Sp(\hat{\rho}_i \hat{\mathcal{B}}_j) = Sp(\hat{\rho}_i \hat{\xi}_j)$$

erhalten haben, können wir den Basiswechsel durchführen:

$$\hat{\rho}'_i \quad \longrightarrow \quad \hat{\xi}'_i = \sum_j \hat{\rho}'_j T_{ij}$$

Ausgeschrieben, mit $W = \frac{1+i}{2}$ und $U = \frac{1-i}{2}$, hat dies folgende Form:

$$\begin{pmatrix} \rho'_{(11)} \\ \rho'_{(12)} \\ \rho'_{(13)} \\ \rho'_{(14)} \\ \rho'_{(21)} \\ \rho'_{(22)} \\ \rho'_{(23)} \\ \rho'_{(24)} \\ \rho'_{(31)} \\ \rho'_{(32)} \\ \rho'_{(33)} \\ \rho'_{(34)} \\ \rho'_{(41)} \\ \rho'_{(42)} \\ \rho'_{(43)} \\ \rho'_{(44)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -W & -W & 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -W & 0 & 0 & 0 & -W & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ \frac{i}{2} & \frac{i}{2} & -W & U & \frac{i}{2} & \frac{i}{2} & -W & U & -W & -W & 1 & i & U & U & i & -1 \\ -U & -U & 1 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -W & -U & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -W & -U & -U & -U & 1 & -i & -W & -W & i & 1 \\ 0 & -W & 0 & 0 & 0 & -W & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ -U & 0 & 0 & 0 & -U & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -U & -W & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -U & -W & -W & -W & 1 & i & -U & -U & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -W & -W & 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-i}{2} & \frac{-i}{2} & -U & W & \frac{-i}{2} & \frac{-i}{2} & -U & W & -U & -U & 1 & -i & W & W & -i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -U & -U & 1 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho'_{(HH)} \\ \rho'_{(HV)} \\ \rho'_{(H+)} \\ \rho'_{(HR)} \\ \rho'_{(VH)} \\ \rho'_{(VV)} \\ \rho'_{(V+)} \\ \rho'_{(VR)} \\ \rho'_{(VH)} \\ \rho'_{(H+)} \\ \rho'_{(HV)} \\ \rho'_{(H+)} \\ \rho'_{(HR)} \\ \rho'_{(RH)} \\ \rho'_{(RV)} \\ \rho'_{(R+)} \\ \rho'_{(RR)} \end{pmatrix}$$

Da jetzt alles gegeben ist, müssen wir nur noch Gleichung (1.28) lösen, um $\underline{\chi}$ zu erhalten. Wegen der speziellen Wahl unserer Basen können wir die Lösung nun in expliziter Form angeben. Mit

$$K = \left(\hat{\mathbf{1}} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \hat{\mathbf{1}} \right) \cdot ((\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbf{1}} + \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x) \otimes (\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbf{1}} + \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x))$$

ist $\underline{\chi}$ gegeben durch

$$\underline{\chi} = K^T \begin{pmatrix} \underline{\xi}'^{(11)} & \underline{\xi}'^{(12)} & \dots \\ \underline{\xi}'^{(21)} & \underline{\xi}'^{(22)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} K \quad (1.29)$$

Um die Bedeutung der Matrix $\underline{\chi}$ zu veranschaulichen, wählen wir das Phasen-Gatter (Gleichung (1.17)) als Beispiel. Wie wir bereits wissen hat es die besondere Eigenschaft, dass seine Operation $\hat{P}G$ unitär ist, weshalb wir sie als schreiben können als $\hat{P}G |\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle$ mit

$$\hat{P}G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}} + \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbf{1}} - \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z)$$

Auf eine Dichtematrix $\hat{\rho}$ angewendet, erhalten wir also

$$\begin{aligned} \hat{P}G \hat{\rho} \hat{P}G &= \frac{1}{4} \left((\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}}) \hat{\rho} (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}}) + (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\sigma}_z) \hat{\rho} (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}}) + \right. \\ &\quad + (\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbf{1}}) \hat{\rho} (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}}) - (\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z) \hat{\rho} (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}}) + \\ &\quad \left. + (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}}) \hat{\rho} (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\sigma}_z) + (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\sigma}_z) \hat{\rho} (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\sigma}_z) + \dots \right) \end{aligned}$$

Führen wir einen Koeffizientenvergleich mit $\hat{Q}(\hat{\rho}) = \sum_{m,l} \chi_{ml} \hat{E}_m \hat{\rho} \hat{E}_l^\dagger$ (Gleichung (1.27)) durch, so können wir alle χ_{ml} (Abbildung 1.3) daraus bestimmen.

$$\begin{aligned} \hat{P}G \hat{\rho} \hat{P}G &= \frac{1}{4} (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}}) \hat{\rho} (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}}) + \frac{1}{4} (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\sigma}_z) \hat{\rho} (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}}) + \frac{1}{4} (\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbf{1}}) \hat{\rho} (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}}) \dots \\ &\quad \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\ &\quad \chi_{(1,1)} = \frac{1}{4} \qquad \chi_{(4,1)} = \chi_{(\hat{\mathbf{1}}\hat{\sigma}_z, \hat{\mathbf{1}}\hat{\mathbf{1}})} = \frac{1}{4} \qquad \chi_{(13,1)} = \chi_{(\hat{\sigma}_z\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{1}}\hat{\mathbf{1}})} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Interessant an der Zerlegung in Pauli-Matrizen ist auch ein Vergleich mit dem CNOT-Gatter in dieser Darstellung. Wir können direkt die enge Beziehung der beiden über die Transformation $(\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{H}) = (\hat{\mathbf{1}} \otimes \frac{\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z}{\sqrt{2}})$ mit dem Hadamard-Gatter \hat{H} erkennen:

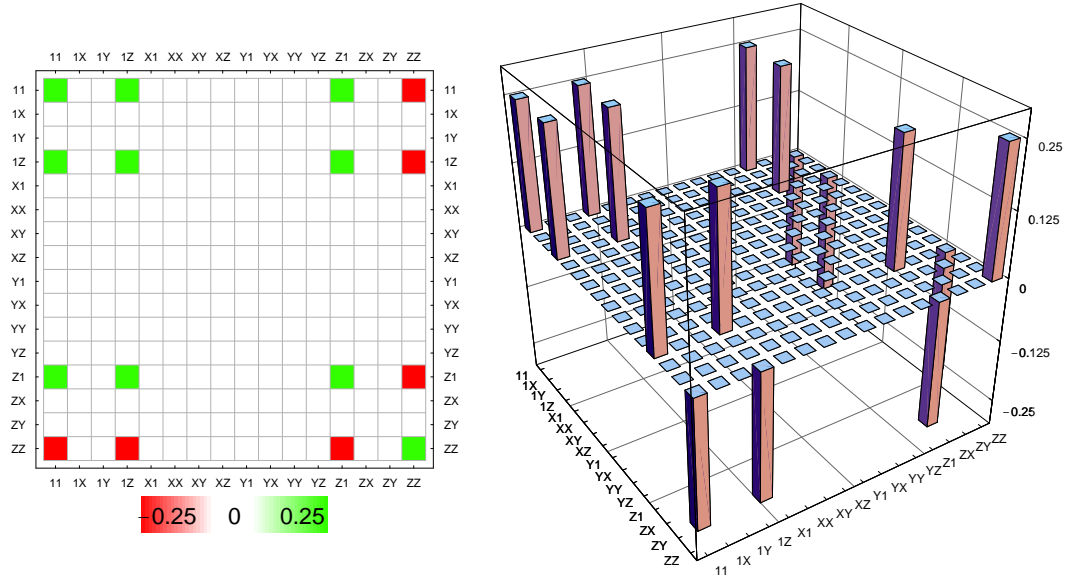


Abbildung 1.3: Die Prozesstomographie-Matrix χ_{ml} für das Phasen-Gatter ($1=\hat{1}$, $X=\hat{\sigma}_x$, $Y=\hat{\sigma}_y$, $Z=\hat{\sigma}_z$).

$$\begin{aligned} \text{CNOT} &= \frac{1}{2} (\hat{1} \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z \otimes \hat{1} + \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x) \\ \hat{P}G &= \frac{1}{2} (\hat{1} \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \otimes \hat{1} - \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z) \end{aligned}$$

Da wir $\underline{\chi}$ nun bestimmt haben, können wir auch neue Operator-Basen \hat{E}_i^{neu} anstatt der Pauli-Matrizen wählen. Wir müssen dazu lediglich eine Basis-Transformation mit $\underline{\chi}$ durchführen. Mit $M_{ij}^{-1} = Sp(\hat{E}_i^{\text{neu}} \hat{E}_j)$ erhalten wir das transformierte $\underline{\chi}^{\text{neu}}$ aus

$$\underline{\chi}^{\text{neu}} = \underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\chi} \cdot \underline{\mathbf{M}}^\dagger$$

Eine interessante n-Qubit Basis ist $\hat{E}_i^{(P)}$, die durch die Projektoren

$$\hat{E}_i^{(P)} = \hat{E}_{2^n i_2 + i_1}^{(P)} = |B_{i_1}\rangle \langle A_{i_2}| \quad \text{mit } i=1,2,\dots,2^{2n} \text{ und } i_1, i_2=1,\dots,2^n$$

definiert ist. Die allgemeine Gatter-Operation (Gleichung (1.27)) für diese Basis lautet

$$\hat{Q}(\hat{\rho}) = \sum_{m,l} \chi_{(m,l)} \hat{E}_m \hat{\rho} \hat{E}_l^\dagger = \sum_{m_1 m_2, l_1 l_2} \chi_{(m_1, m_2, l_1, l_2)} |B_{m_2}\rangle \langle A_{m_1}| \hat{\rho} |A_{l_1}\rangle \langle B_{l_2}|$$

Falls der Projektor $|A_{m_1}\rangle \langle A_{l_1}|$ in der Basis von $\hat{\rho}$ diagonal ist, können die Einträge $\chi_{(m_1, m_2, l_1, l_2)}$ wegen

$$\hat{Q}(|A_{m_1}\rangle \langle A_{l_1}|) = \chi_{(m_1, m_2, l_1, l_2)} |B_{m_2}\rangle \langle B_{l_2}|$$

als Übergangswahrscheinlichkeit bei der Gatter-Transformation interpretiert werden.

$$|A_{m_1}\rangle\langle A_{l_1}| \xrightarrow{\chi_{(m_1, m_2, l_1, l_2)}} |B_{m_2}\rangle\langle B_{l_2}|$$

Für die spezielle Wahl von $|A_{m_1}\rangle\langle A_{l_1}| = \hat{\rho}_i$, wobei $\hat{\rho}_i$ einer der Eingangszustände ist, sind $\chi_{(m_1, m_2, l_1, l_2)}$ und der Eintrag $|B_{m_2}\rangle\langle B_{l_2}|$ in der gemessenen Dichtematrix $\hat{\rho}'_i$ identisch.

Neben den Basen $\hat{E}_i^{(P)}$ aus Projektoren wollen wir nun noch eine weitere wichtige Basis besprechen. Da wir für die Basis-Operatoren jede beliebige unitäre Transformation verwenden dürfen, können wir auch die Gatter-Transformation (z.B. CNOT, $\hat{P}G, \dots$) als Basis-Operator verwenden. Da der Wert des zugehörigen Eintrags in χ_{ml} angibt wie „gut“ das reale Gatter die unitäre Gatter-Transformation repräsentiert, ist er für ein nicht-perfektes Gatter interessant, weil er dessen Qualität widerspiegelt.

Das führt uns zu der noch offenen Frage, welche Möglichkeiten es gibt, ein nicht-perfektes Gatter \hat{G}' zu bewerten.

1.3.3 Maße für die Nähe der Gatter-Operation zum idealen Gatter

Jedes reale Gatter, von dem wir nun wissen, wie wir es beschreiben können, weicht von der theoretischen Vorlage ab. Es ist daher wichtig, eine Methode zu finden, mit der wir quantifizieren können, wie gut das reale Gatter das theoretische, ideale Gatter \hat{Q}_{ideal} repräsentiert.

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\rho} & \longrightarrow & \boxed{\hat{Q}_{[ideal]}} & \longrightarrow & \hat{\rho}'_{ideal} \\ & & \updownarrow ? & & \\ \hat{\rho} & \longrightarrow & \boxed{\hat{Q}_{[exp]}} & \longrightarrow & \hat{\rho}'_{exp} \end{array}$$

Um so eine Quantifizierung vorzunehmen, benötigen wir allerdings ein Maß auf dem Raum der Matrizen χ_{ml} , welches wir aber a priori nicht besitzen. Wir können aber auf bestehende Maße zurückgreifen, wenn wir die Qualität des Gatters über die Qualität der Zustände definieren, die es erzeugt.

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\rho} & \longrightarrow & \boxed{\hat{Q}_{[ideal]}} & \longrightarrow & \hat{\rho}'_{ideal} \\ & & & & \updownarrow \text{Maß} \\ \hat{\rho} & \longrightarrow & \boxed{\hat{Q}_{[exp]}} & \longrightarrow & \hat{\rho}'_{exp} \end{array}$$

Nehmen wir als Zustandsmaß die *Fidelity*, so können wir die *minimale Gatter-Fidelity* F_g [5] als die minimale Fidelity zwischen einem realen Zustand $\hat{\rho}'_{exp}$ und dem zugehörigen idealen Zustand $\hat{\rho}'_{ideal}$ für alle möglichen

Eingangszustände $\hat{\rho}$ definieren. Ist $\hat{\mathcal{Q}}^{[ideal]}$ durch eine unitäre Transformation U beschreibbar, so können wir F_g auf folgende Weise darstellen.

$$F_g(U, \hat{\mathcal{Q}}^{[exp]}) = \text{Min}_{|\psi\rangle} \langle \psi | U^\dagger \hat{\mathcal{Q}}^{[exp]} (|\psi\rangle\langle\psi|) U | \psi \rangle \quad (1.30)$$

Allerdings muss die Minimierung über alle möglichen reinen Zustände $|\psi\rangle$ numerisch erfolgen, was die Berechnung von F_g sehr aufwendig macht.

Um ein Gatter direkt über $\chi_{ml}^{[exp]}$ zu bewerten, können wir die weiter oben schon angesprochene Darstellung von $\chi_{ml}^{[exp]}$ in einer Basis, die die ideale Gatter-Transformation \hat{G} enthält, verwenden. Der Eintrag aus $\chi_{ml}^{[exp]}$, der zum Operator $\hat{E}_m \hat{\rho} \hat{E}_n^\dagger = \hat{G} \hat{\rho} \hat{G}$ aus $\hat{\mathcal{Q}}$ gehört, repräsentiert dabei den Anteil der idealen Gatter-Transformation \hat{G} am realen Gatter. Er wird mit *Prozess-Fidelity* F_P [25] bezeichnet. Außerdem kann die *Prozess-Fidelity* F_P auch in folgender Weise geschrieben werden:

$$F_P = \text{Sp}(\underline{\chi}^{[ideal]} \cdot \underline{\chi}^{[exp]}) \quad (1.31)$$

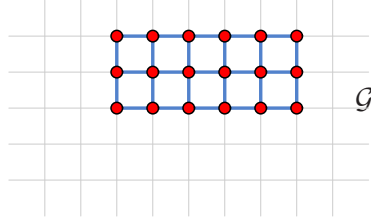
Dadurch wird sie von der Basisdarstellung unabhängig und leicht zu berechnen.

Wir haben also gesehen, dass es mit speziellen Quantengattern möglich ist, Verschränkung zu erzeugen oder zu zerstören. Ein solches Gatter, nämlich das schon erwähnte Phasengatter, haben wir dabei realisiert, um einen 4-Qubit-verschränkten Zustand zu erzeugen. Dieser Zustand gehört zur Gruppe der *Cluster-Zustände*, auf die wir im nächsten Abschnitt genauer eingehen wollen.

1.4 Cluster-Zustände

Die *Cluster-Zustände* [6] bilden eine Klasse von Zuständen, die viele interessante Verschränkungseigenschaften aufweisen. Wir werden zuerst auf ihre allgemeine Definition und die wichtigsten Eigenschaften eingehen, worauf wir im Anschluss besonders auf den 4-Qubit *Cluster-Zustand* eingehen werden, den wir in einem 4-Photonen-Experiment erzeugen.

Um *Cluster-Zustände* zu definieren, müssen wir zuerst den Begriff eines Clusters einführen. Stellen wir uns dazu ein d-dimensionales Gitter vor, dessen Gitterpunkte an manchen Stellen von Qubits besetzt sind, an manchen nicht. Ein Cluster \mathcal{G} ist eine Teilmenge dieser Qubits, die die Eigenschaft besitzt, dass jedes beliebige Qubit-Paar aus dieser Menge über besetzte Gitterpunkte miteinander verbunden ist (Abbildung 1.4).

Abbildung 1.4: Ein Beispiel eines zweidimensionalen Clusters \mathcal{G} .

Ein *Cluster-Zustand* $|\phi_{\{\varepsilon\}}\rangle_{\mathcal{G}}$ auf einem Cluster \mathcal{G} mit n Qubits wird durch die folgenden n Eigenwertgleichungen festgelegt [3]:

$$\hat{K}^{(a)} |\phi_{\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}}\rangle_{\mathcal{G}} = (-1)^{\varepsilon_a} |\phi_{\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}}\rangle_{\mathcal{G}} \quad \text{mit } \varepsilon_i \in \{0, 1\}, i = 1 \dots n \quad (1.32)$$

Dabei ist $\hat{K}^{(a)}$ ein Korrelations-Operator, der auf Qubit a die Transformation $\hat{\sigma}_x$ und auf den benachbarten Qubits $b \in \text{Nachbar}(a)$ $\hat{\sigma}_z$ ausführt:

$$\hat{K}^{(a)} = \hat{\sigma}_x^{(a)} \bigotimes_{b \in \text{Nachbar}(a)} \hat{\sigma}_z^{(b)} \quad (1.33)$$

Die Parameter $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $i = 1 \dots n$ geben dabei an, welches Vorzeichen der Eigenwert der i -ten Eigenwertgleichung hat. Für n Qubits ergeben sich daraus 2^n verschiedene *Cluster-Zustände* $|\phi_{\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}}\rangle$, die alle orthogonal sind und eine Basis für den n -Qubit Hilbertraum bilden [3].

Führen wir jedoch auf einem der Operatoren $\hat{K}^{(a)}$ folgende lokale unitäre Transformation durch, so können wir das Vorzeichen jeder Eigenwertgleichung beliebig ändern:

$$\hat{\sigma}_z^{(b)} \hat{K}^{(a)} \hat{\sigma}_z^{\dagger (b)} = (-1)^{\delta_{a,b}} \hat{K}^{(a)} \quad (1.34)$$

Daraus folgt, dass alle n -Qubit *Cluster-Zustände* $|\phi_{\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}}\rangle_{\mathcal{G}}$, die auf dem gleichen Cluster definiert sind, unter lokalen Transformationen äquivalent sind. Wir können uns also zukünftig, wenn wir die Verschränkungseigenschaften untersuchen, auf einen Vertreter $|\mathcal{C}_n\rangle$ beschränken, der zum Beispiel die Eigenschaft $\{\varepsilon\} = \{0, 0, \dots, 0\}$ besitzt:

$$|\mathcal{C}_n\rangle := |\phi_{\{0, 0, \dots, 0\}}\rangle_{\mathcal{G}}$$

Um außerdem nicht immer eine Schar von Eigenwertgleichungen lösen zu müssen, gibt es eine direkte Methode, um beliebige *Cluster-Zustände* $|\mathcal{C}_n\rangle$ zu definieren:

Wir präparieren alle Qubits des Clusters \mathcal{G} im Zustand $\bigotimes_n |+\rangle = |\overbrace{++ \dots +}^n\rangle$ und wenden anschließend den Operator $\hat{S}_{(\mathcal{G})}$ an. Er besteht aus Produkten

der $\hat{\mathcal{P}}^{(a,b)}$ -Operatoren, die auf alle benachbarten Paare des Clusters angewendet werden um diese miteinander verschränken.

$$|\mathcal{C}_n\rangle = \hat{\mathcal{S}}_{(\mathcal{G})} |++\cdots+\rangle = \prod_{a,b \in \mathcal{G} | b-a \in \gamma_d} \hat{\mathcal{P}}^{(a,b)} |++\cdots+\rangle \quad (1.35)$$

$$\text{mit } \hat{\mathcal{P}}^{(a,b)} = \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{1}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{1}}^{(b)} + \hat{\sigma}_z^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{1}}^{(b)} + \hat{\mathbf{1}}^{(a)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(b)} - \hat{\sigma}_z^{(a)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(b)} \right) \quad (1.36)$$

Dabei bezeichnet γ_d die einseitige Nächste-Nachbar-Wechselwirkung im d-dimensionalen Gitter, die nur entlang der Gitterachsen wirkt:

$$\gamma_1 = \{1\}, \quad \gamma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \gamma_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Um zu zeigen, dass $\hat{\mathcal{P}}^{(a,b)}$ in der Tat die im Zustand $|++\rangle$ präparierten Paare miteinander verschränkt, schreiben wir ihn für zwei Qubits aus. Dabei erhalten wir die Phasengatter-Transformation $\hat{P}\hat{G}$, von der wir bereits aus Abschnitt 1.3 wissen, dass sie den separablen Zustand $|++\rangle$ in einen BELL-Zustand transformiert und damit den kleinsten *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_2\rangle$ erzeugt.

$$\hat{\mathcal{P}}^{(1,2)} = \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}} + \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbf{1}} + \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

Damit liefert diese Art der Definition von *Cluster-Zuständen* gleichzeitig schon eine Anleitung zur experimentellen Erzeugung. Wir wollen diesem Thema aber nicht vorgreifen, da wir im nächsten Kapitel ausführlich auf das Experiment eingehen werden.

Um die *Cluster-Zustände* etwas anschaulicher zu machen, sind in Tabelle 1.3 einige Beispiele für *Cluster-Zustände* angegeben. Der $|\mathcal{C}_2\rangle$ ist, wie wir es wegen $\hat{\mathcal{P}}^{(1,2)} = \hat{P}\hat{G}$ erwarten, äquivalent zum BELL-Zustand $|\phi^+\rangle$. Außerdem sind der *GHZ₃*-Zustand und der *Cluster-Zustand* für drei Qubits äquivalent unter lokalen unitären Transformationen, welche wir mit „ $=_{\circlearrowleft}$ “ bezeichnen wollen ($|\mathcal{C}_3\rangle =_{\circlearrowleft} |\text{GHZ}_3\rangle$). Für vier Qubits gehören sie jedoch verschiedenen Verschränkungs-Klassen an, worauf wir später noch stoßen werden. Auch die beiden in Tabelle 1.3 angegebenen *Cluster-Zustände* $|\mathcal{C}_4\rangle$ und $|\mathcal{C}_{4Q}\rangle$, die aus verschiedenen Clustern $|\mathcal{C}_4\rangle$ entstehen, sind äquivalent. Darum ist der *Cluster-Zustand* für vier Qubits eindeutig festgelegt.

Wir wollen uns nun den Verschränkungseigenschaften der *Cluster-Zustände* zuwenden. Dazu betrachten wir einen beliebigen n-Qubit Clusters \mathcal{G}_n , auf dem ein *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_n\rangle$ definiert ist. Führen wir auf dem Rand-Qubit n eine Messung in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis durch, so erhalten wir wieder einen *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_{n-1}\rangle$ mit $n-1$ Qubits. Um dies zu zeigen betrachten wir die Definition von $|\mathcal{C}_n\rangle$ und zerlegen den n-Qubit-Verschränkungs-Operator $\mathcal{S}_{(\mathcal{G}_n)}$ in


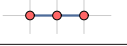


Cluster \mathcal{G}	Zustand $ \mathcal{C}_n\rangle$
	$ \mathcal{C}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (0+\rangle + 1-\rangle)$
	$ \mathcal{C}_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (+0+\rangle + -1-\rangle)$
	$ \mathcal{C}_4\rangle = \frac{1}{2} (+0+0\rangle + +0-1\rangle + -1-0\rangle + -1+1\rangle)$
	$ \mathcal{C}_{4Q}\rangle = \frac{1}{2} (+0+0\rangle + -0-1\rangle + -1-0\rangle + +1+1\rangle)$

Tabelle 1.3: Beispiele einiger *Cluster-Zustände* $|\mathcal{C}_n\rangle$.

einen $(n-1)$ -Qubit-Verschrankungs-Operator mal einem Produktterm, der aufgrund der Messung in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis keine Verschrankung erzeugt. Aus

$$|\mathcal{C}_n\rangle = \mathcal{S}_{(\mathcal{G}_n)} |++\dots+\rangle = \left(\mathcal{S}_{(\mathcal{G}_{n-1})} \cdot \prod_{i \in \mathcal{G} | n-i \in \gamma_d} \mathcal{P}^{(i,n)} \right) |++\dots+\rangle,$$

zusammen mit einer Messung von ${}_n\langle H/V |$ am n -ten Qubit,

$$\begin{aligned} {}_n\langle H | \hat{\mathcal{P}}^{(i,n)} &= {}_n\langle H | \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{1}} + \hat{\sigma}_z^{(i)} + \hat{\sigma}_z^{(n)} - \hat{\sigma}_z^{(i)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(n)} \right) = \hat{\mathbf{1}}^{(i)} \otimes {}_n\langle H | \\ {}_n\langle V | \hat{\mathcal{P}}^{(i,n)} &= \hat{\sigma}_z^{(i)} \otimes {}_n\langle V | \end{aligned}$$

erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned} {}_n\langle H | \mathcal{C}_n \rangle &= {}_n\langle H | \mathcal{S}_{(\mathcal{G}_n)} |++\dots+\rangle = |\mathcal{C}_{n-1}\rangle \\ {}_n\langle V | \mathcal{C}_n \rangle &= \prod_i \hat{\sigma}_z^{(i)} |\mathcal{C}_{n-1}\rangle = \circlearrowleft |\mathcal{C}_{n-1}\rangle \end{aligned}$$

Aus diesem Grund können wir jeden n -Qubit *Cluster-Zustand* durch $n-2$ Messungen in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis auf $|\mathcal{C}_2\rangle = |\text{Bell}\rangle$ reduzieren:

$$|\mathcal{C}_n\rangle \xrightarrow{\langle \hat{\sigma}_z |} |\mathcal{C}_{n-1}\rangle$$

Daraus folgt, dass *Cluster-Zustände* eine *maximale Connectedness* [6] besitzen.

Ein n -Qubit-Zustand besitzt *maximale Connectedness*, wenn zwei beliebige Qubits $m, l \in \{1 \dots n\}$ mit Gewissheit auf einen reinen BELL-Zustand projiziert werden können.

Nachdem wir jetzt einige Eigenschaften der *Cluster-Zustände* im Allgemeinen kennen, betrachten wir von nun an nur noch den 4-Qubit *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_4\rangle$:

$$|\mathcal{C}_4\rangle = \frac{1}{2} (|+0+0\rangle + |+0-1\rangle + |-1-0\rangle + |-1+1\rangle)$$

Dabei wollen wir noch die Transformation $(\hat{H} \otimes \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{H})$ mit dem *Hadamard-Gatter* $\hat{H} = \frac{\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z}{\sqrt{2}}$ auf ihn anwenden, damit er in seiner Form dem Zustand entspricht, wie er im Experiment, das in Kapitel 2 beschrieben wird, erzeugt wird. So gelangen wir zu folgender Darstellung des transformierten *Cluster-Zustands* $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$, in der wir die vier Qubits mit **a**, **b**, **c** und **d** bezeichnen wollen:

$$|\mathcal{C}_4^\circ\rangle = \frac{1}{2} (|0000\rangle_{\mathbf{abcd}} + |0011\rangle_{\mathbf{abcd}} + |1100\rangle_{\mathbf{abcd}} - |1111\rangle_{\mathbf{abcd}})$$

Um den $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$ genauer zu charakterisieren, betrachten wir sein Verhalten bei Messung eines Qubits in der $\hat{\sigma}_x$ und $\hat{\sigma}_z$ Basis. Dabei müssen wir beachten, dass durch die Anwendung des *Hadamard-Gatters* die Rollen von $\hat{\sigma}_x$ und $\hat{\sigma}_z$ für den $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$, im Vergleich zu $|\mathcal{C}_4\rangle$, teilweise vertauscht sind:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{C}_4^\circ | \hat{\sigma}_x^{(\mathbf{a})} | \mathcal{C}_4^\circ \rangle &= \langle \mathcal{C}_4 | (\hat{H} \otimes \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{H}) \hat{\sigma}_x^{(\mathbf{a})} (\hat{H} \otimes \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{H}) | \mathcal{C}_4 \rangle = \\ &= \langle \mathcal{C}_4 | \hat{\sigma}_z^{(\mathbf{a})} | \mathcal{C}_4 \rangle \end{aligned}$$

Wie aus Tabelle 1.4 ersichtlich, erhalten wir bei einer Messung an $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$ in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis einen biseparablen Zustand der Form $|0/1\rangle \otimes |\phi^\pm\rangle$, während wir bei einer Messung in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis einen zu $|GHZ_3\rangle$ äquivalenten Zustand bekommen. Bei Verlust eines Qubits erhalten wir einen gemischten Zustand, der aus allen möglichen Restzuständen einer Messung in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis besteht. Wir können also durch die Messung eines einzelnen Qubits die Verschränkung des Zustands nicht vollständig zerstören. Damit unterscheidet sich der $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$ vom $|GHZ_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1111\rangle)$, der bei Verlust eines Teilchens auf den separablen gemischten Zustand $\frac{1}{2}|000\rangle\langle 000| + \frac{1}{2}|111\rangle\langle 111|$ projiziert wird.

Führen wir eine zweite Messung am *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$ durch (Tabelle 1.4), so können wir den Zustand durch zwei Messungen in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis völlig einschränken. Seine *Persistency* P_e ist deshalb $P_e = 2$. Allgemein kann man zeigen, dass n-Qubit *Cluster-Zustände* eine *Persistency* von $P_e = \frac{n}{2}$ besitzen [6].

Die Eigenschaften des *Cluster-Zustands* bezüglich einer Messung an einem oder mehreren Qubits sind noch einmal in Tabelle 1.5 zusammengefasst.

Cluster-Zustände sind eindeutig über einen Satz von Eigenwertgleichungen (Gleichung (1.32)) mit dem Korrelations-Operator $\hat{K}^{(a)}$ festgelegt. Für den $|\mathcal{C}_4\rangle$ bedeutet das, dass sämtliche Korrelationen, die keinen Erwartungswert von null haben, durch

$$\begin{aligned} (\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}}) | \mathcal{C}_4 \rangle &= | \mathcal{C}_4 \rangle \\ (\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbf{1}}) | \mathcal{C}_4 \rangle &= | \mathcal{C}_4 \rangle \\ (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z) | \mathcal{C}_4 \rangle &= | \mathcal{C}_4 \rangle \\ (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x) | \mathcal{C}_4 \rangle &= | \mathcal{C}_4 \rangle \end{aligned}$$

Messung eines Qubits	
${}_{a/b}\langle 0 \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= \frac{1}{\sqrt{2}}(000\rangle + 011\rangle) = 0\rangle_{b/a} \otimes \phi^+\rangle_{cd}$
${}_{a/b}\langle 1 \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= \frac{1}{\sqrt{2}}(100\rangle - 111\rangle) = 1\rangle_{b/a} \otimes \phi^-\rangle_{cd}$
${}_{c/d}\langle 0 \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= \phi^+\rangle_{ab} \otimes 0\rangle_{d/c}$
${}_{c/d}\langle 1 \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= \phi^-\rangle_{ab} \otimes 1\rangle_{d/c}$
${}_{a/b}\langle + \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= \frac{1}{\sqrt{2}}(+00\rangle + -11\rangle) = \circlearrowleft GHZ_3\rangle_{bcd/acd}$
${}_{a/b}\langle - \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= \frac{1}{\sqrt{2}}(+11\rangle + -00\rangle)_{bcd/acd}$
${}_{c/d}\langle + \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= \frac{1}{\sqrt{2}}(00+\rangle + 11-\rangle)_{abd/abc}$
${}_{c/d}\langle - \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= \frac{1}{\sqrt{2}}(00-\rangle + 11+\rangle)_{abd/abc}$
$Sp_{a/b}(\mathcal{C}_4^\circ\rangle\langle\mathcal{C}_4^\circ)$	$= 0\rangle_{b/a} \otimes \phi^+\rangle_{cd} \quad \boxplus \quad 1\rangle_{b/a} \otimes \phi^-\rangle_{cd}$
$Sp_{c/d}(\mathcal{C}_4^\circ\rangle\langle\mathcal{C}_4^\circ)$	$= \phi^+\rangle_{ab} \otimes 0\rangle_{d/c} \quad \boxplus \quad \phi^-\rangle_{ab} \otimes 1\rangle_{d/c}$
Messung an zwei Qubits	
${}_{ab/cd}\langle 00 \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= \frac{1}{\sqrt{2}}(00\rangle + 11\rangle) = \phi^+\rangle_{cd/ab}$
${}_{ab/cd}\langle 11 \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= \frac{1}{\sqrt{2}}(00\rangle - 11\rangle) = \phi^-\rangle_{cd/ab}$
${}_{ab/cd}\langle 01 \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= 0$
${}_{ab/cd}\langle 10 \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= 0$
${}_{ad/bc}\langle 00 \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= 00\rangle_{bc/ad}$
${}_{ad/bc}\langle 01 \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= 01\rangle_{bc/ad}$
${}_{ad/bc}\langle 10 \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= 10\rangle_{bc/ad}$
${}_{ad/bc}\langle 11 \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= 11\rangle_{bc/ad}$
${}_{ab/cd}\langle ++ \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= 00\rangle_{cd/ab}$
${}_{ab/cd}\langle -- \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= 00\rangle_{cd/ab}$
${}_{ab/cd}\langle +- \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= 11\rangle_{cd/ab}$
${}_{ab/cd}\langle -+ \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= 11\rangle_{cd/ab}$
${}_{ad/bc}\langle +\pm \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= \phi_\pm^\pm\rangle_{bc/ad}$
${}_{ad/bc}\langle -\pm \mathcal{C}_4^\circ \rangle_{abcd}$	$= \psi_\pm^\pm\rangle_{bc/ad}$
$Sp_{ab/cd}(\mathcal{C}_4^\circ\rangle\langle\mathcal{C}_4^\circ)$	$= (00\rangle \boxplus 11\rangle)_{cd/ab}$
$Sp_{ac/ad/bc/bd}(\mathcal{C}_4^\circ\rangle\langle\mathcal{C}_4^\circ)$	$= 00\rangle \boxplus 01\rangle \boxplus 10\rangle \boxplus 11\rangle$

Tabelle 1.4: Ergebnisse einer Messung bzw. mehrerer Messungen am transformierten Cluster-Zustand $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$. Dabei bedeutet $Sp_{i/j}$, dass die partielle Spur über Qubit i oder Qubit j gebildet wird. Das Symbol „ $|A\rangle \boxplus |B\rangle$ “ = $\frac{1}{2}(|A\rangle\langle A| + |B\rangle\langle B|)$ bezeichnet eine inkohärente Mischung zu gleichen Teilen.

und alle Produkte die wir daraus bilden können beschrieben werden. Insgesamt erhalten wir dadurch 16 mögliche Korrelationen (Tabelle 1.6), deren jeweilige Korrelations-Operatoren zusammen die Gruppe der Stabilizer S bilden [26]. Für die Stabilizer-Operatoren S_m gilt:

$$S_m |\psi\rangle = |\psi\rangle$$

$$\begin{aligned} \textcircled{a} - \textcircled{b} - \textcircled{c} - \textcircled{d} &= \frac{1}{2} (|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle)_{\mathbf{abcd}} \\ \textcircled{a} - \textcircled{b} - \textcircled{c} \boxed{\hat{X}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00+\rangle \pm |11-\rangle)_{\mathbf{abc}} \quad \dots \text{äquivalent zu } |GHZ_3\rangle \\ \boxed{\hat{X}} \textcircled{b} - \textcircled{c} \boxed{\hat{X}} &= |\phi_{\ominus}^{\pm}\rangle_{\mathbf{bc}} / |\psi_{\ominus}^{\pm}\rangle_{\mathbf{bc}} \\ \textcircled{a} - \boxed{\hat{X}} - \textcircled{c} \boxed{\hat{X}} &= |\phi_{\ominus}^{\pm}\rangle_{\mathbf{ac}} / |\psi_{\ominus}^{\pm}\rangle_{\mathbf{ac}} \\ \\ \textcircled{a} - \textcircled{b} - \textcircled{c} \boxed{\hat{Z}} &= |\phi^+\rangle_{\mathbf{ab}} |0\rangle_{\mathbf{c}} / |\phi^-\rangle_{\mathbf{ab}} |1\rangle_{\mathbf{c}} \\ \textcircled{a} \boxed{\hat{Z}} \textcircled{c} \boxed{\hat{Z}} &= |00\rangle_{\mathbf{ac}}, |01\rangle_{\mathbf{ac}}, |10\rangle_{\mathbf{ac}} \text{ und } |11\rangle_{\mathbf{ac}} \dots \text{separabel} \\ \\ \textcircled{a} - \textcircled{b} - \textcircled{c} \boxed{?} &= \text{Mischung aus } |\phi^-\rangle_{\mathbf{ab}} |0\rangle_{\mathbf{c}} \text{ und } |\phi^+\rangle_{\mathbf{ab}} |1\rangle_{\mathbf{c}} \\ \textcircled{a} \boxed{?} \textcircled{c} \boxed{?} &= \text{Mischung aus } |00\rangle_{\mathbf{ac}}, |01\rangle_{\mathbf{ac}}, |10\rangle_{\mathbf{ac}} \text{ und } |11\rangle_{\mathbf{ac}} \dots \text{separabel} \end{aligned}$$

Tabelle 1.5: Zusammenfassung des Verhaltens des $|\mathcal{C}_4^{\ominus}\rangle$ bei lokalen Messungen am Qubit \textcircled{n} in der $\boxed{\hat{X}} = \hat{\sigma}_x$ bzw. $\boxed{\hat{Z}} = \hat{\sigma}_z$ -Basis oder bei Verlust eines Qubits $\boxed{?}$.

k	Stabilizer S_k	k	Stabilizer S_k
1	$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}}$	9	$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$
2	$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z$	10	$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}$
3	$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y$	11	$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x$
4	$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x$	12	$-\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y$
5	$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y$	13	$\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x$
6	$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x$	14	$-\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y$
7	$-\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}}$	15	$\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$
8	$-\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z$	16	$\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}$

Tabelle 1.6: Alle 16 *Stabilizer*-Operatoren des 4-Qubit *Cluster-Zustands* $|\mathcal{C}_4^{\ominus}\rangle$.

Alle anderen Korrelationen haben Eigenwert null. Diese besondere Eigenschaft können wir uns im Experiment zunutze machen, um die *Fidelity* des $|\mathcal{C}_4^{\ominus}\rangle$ zu berechnen. Haben wir einen beliebigen Zustand $\hat{\rho}$ gegeben und wollen dessen *Fidelity* \mathcal{F} mit $|\mathcal{C}_4^{\ominus}\rangle$ berechnen, so zerlegen wir $\hat{\rho}$ in eine Basis aus Pauli-Matrizen und können sofort vereinfachen, da nur die 16 *Stabilizer*-

Terme einen Beitrag liefern.

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \langle \mathcal{C}_4^\odot | \hat{\rho} | \mathcal{C}_4^\odot \rangle \quad \text{mit} \quad \hat{\rho} = \frac{1}{16} \sum_{i,j,k,l=0}^3 \lambda_{ijkl} \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_k \otimes \hat{\sigma}_l \\ \mathcal{F} &= \frac{1}{16} \langle \mathcal{C}_4^\odot | \sum_{i,j,k,l=0}^3 \lambda_{ijkl} \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_k \otimes \hat{\sigma}_l | \mathcal{C}_4^\odot \rangle \\ \mathcal{F} &= \frac{1}{16} \langle \mathcal{C}_4^\odot | \sum_{m=1}^{16} \lambda_m S_m | \mathcal{C}_4^\odot \rangle\end{aligned}\tag{1.38}$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{16} \sum_{m=1}^{16} \lambda_m \quad \text{mit} \quad \lambda_m = Sp(\hat{\rho} S_m)\tag{1.39}$$

Die Fidelity von $\hat{\rho}$ an $|\mathcal{C}_4^\odot\rangle$ ist also ausschließlich durch den Erwartungswert der 16 *Stabilizer*-Operatoren gegeben. Da diese jeweils einer lokalen Messung entsprechen, benötigen wir also nur 16 Korrelations-Messungen, um \mathcal{F} zu bestimmen. Das ist ein großer Vorteil gegenüber einer Zustandsstomographie, für die wir 81 Korrelations-Messungen benötigen, um $\hat{\rho}$ zu bestimmen und daraus die *Fidelity* zu berechnen.

Neben den Eigenschaften der *Cluster-Zustände* wie der *Connectedness*, *Persistency* und der Beschreibung durch *Stabilizer*, haben wir in den Gleichungen (1.35) und (1.37) auch schon eine ungefähre Anleitung zur experimentellen Erzeugung bekommen. Diesen Weg wollen wir jetzt weiter verfolgen und aufzeigen, wie ein *Cluster-Zustand* im Experiment realisiert werden kann.

Kapitel 2

Experimentelle Erzeugung des Cluster-Zustands mit Hilfe eines Phasengatters

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der experimentellen Erzeugung des *Cluster-Zustands* $|\mathcal{C}_4^\odot\rangle$ in einem 4-Photonen-Experiment. Wir werden zuerst einen möglichen Weg der Erzeugung mittels eines probabilistischen Phasengatters aufzeigen und uns anschließend auf Aufbau und Justage des Experiments konzentrieren. Dabei demonstrieren wir auch die Möglichkeit einer Charakterisierung des Phasengatters mit der in Kapitel 1.3 eingeführten Prozess-tomographie.

Betrachten wir den *Cluster-Zustand* in folgender, schon bekannter Form

$$|\mathcal{C}_4^\odot\rangle = |HHHH\rangle + |HHVV\rangle + |VVHH\rangle - |VVVV\rangle \quad (2.1)$$

und vergleichen ihn mit dem Produkt von zwei BELL-Zuständen

$$\begin{aligned} |\phi^+\rangle \otimes |\phi^+\rangle &= (|HH\rangle + |VV\rangle) \otimes (|HH\rangle + |VV\rangle) = \\ &= |HHHH\rangle + |HHVV\rangle + |VVHH\rangle + |VVVV\rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

so fällt auf, dass der einzige Unterschied zwischen den beiden Zuständen durch den Phasenfaktor des $|VVVV\rangle$ -Terms gegeben ist. Um diese Phase zu erzeugen benötigen wir folgende Transformation:

$$\begin{aligned} |HHHH\rangle_{abcd} &\longrightarrow |HHHH\rangle_{abcd} \\ |HHVV\rangle_{abcd} &\longrightarrow |HHVV\rangle_{abcd} \\ |VVHH\rangle_{abcd} &\longrightarrow |VVHH\rangle_{abcd} \\ |VVVV\rangle_{abcd} &\longrightarrow -|VVVV\rangle_{abcd} \end{aligned}$$

Wie wir sehen, entspricht dies einer Phasengatter-Operation $\hat{P}G$ (Gleichung (1.17)), angewendet auf die Qubits **b** und **c**. Diese Vorgehensweise, den $|\mathcal{C}_4^\odot\rangle$

zu erzeugen, wurde uns schon in den Gleichungen (1.35) und (1.37) nahe gelegt. Dort haben wir gesehen, dass sich der *Cluster-Zustand*, bis auf lokale Transformationen, durch drei Phasengatter-Operationen $\hat{\mathcal{P}}^{(a,b)}$, $\hat{\mathcal{P}}^{(b,c)}$, $\hat{\mathcal{P}}^{(c,d)}$ auf den Zustand $|++++\rangle_{abcd}$ erzeugen lässt:

$$|C_4\rangle = \hat{\mathcal{P}}^{(a,b)} \cdot \hat{\mathcal{P}}^{(b,c)} \cdot \hat{\mathcal{P}}^{(c,d)} |++++\rangle_{abcd} = \hat{\mathcal{P}}^{(b,c)} |\phi_{\odot}^+\rangle_{ab} \otimes |\phi_{\odot}^+\rangle_{cd} \quad (2.3)$$

Wir benötigen also zur Erzeugung des $|C_4^{\odot}\rangle$ zum einen eine Quelle, die die beiden Zustände $|\phi^+\rangle_{ab}$ und $|\phi^+\rangle_{cd}$ erzeugt, und zum anderen ein *kontrolliertes Phasengatter*:

$$|VV\rangle_{bc} \xrightarrow{\text{Phasengatter}} -|VV\rangle_{bc}$$

Experimentell können wir dies mit dem in Abbildung 2.1 dargestellten Aufbau verwirklichen:

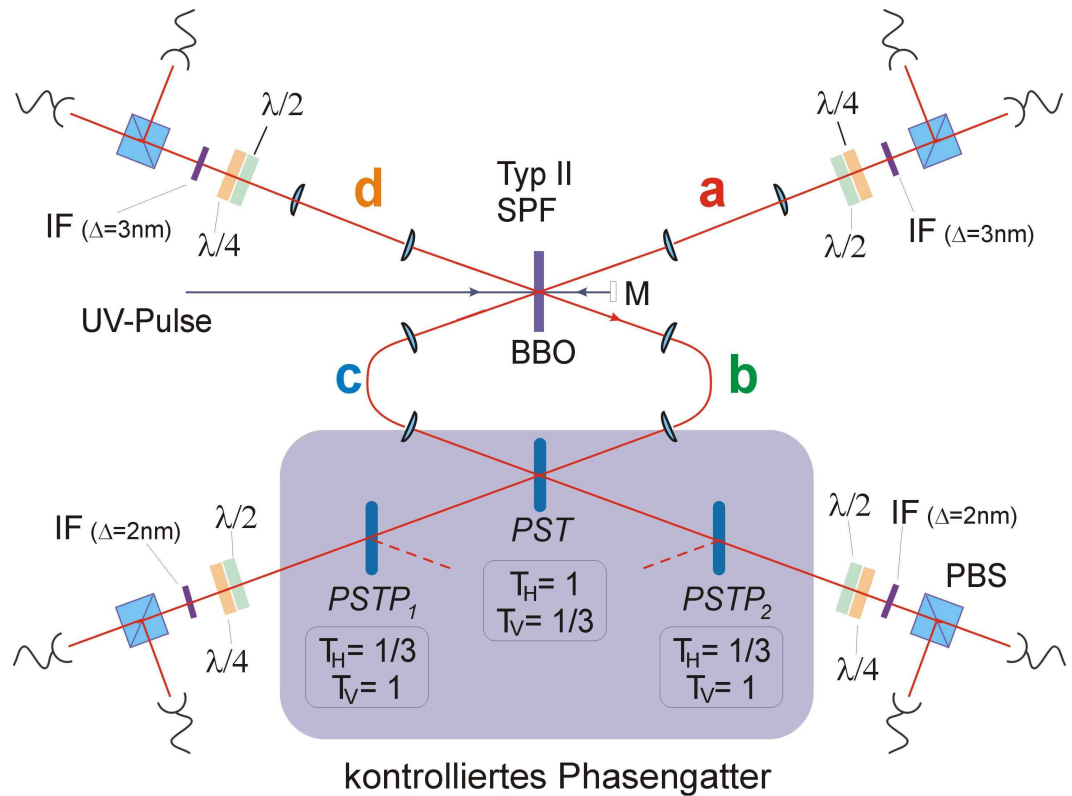


Abbildung 2.1: Gesamter Versuchsaufbau zur Erzeugung des $|C_4^{\odot}\rangle$.

Wir wollen einen kurzen Überblick über das Experiment geben:

Ein **UV-Puls** trifft auf einen **BBO**-Kristall, wo durch spontane parametrische Fluoreszenz (**SPF**) zwei polarisationsverschränkte, infrarote Photonen orthogonaler Polarisation (EPR-Paar) erzeugt und in die Moden **a** und

b emittiert werden. Die beiden Photonen werden in *Monomodens*-Glasfasern eingekoppelt und dort in den Zustand $|\phi^+\rangle_{\mathbf{ab}}$ transformiert.

Durch einen UV-Spiegel **M** wird der UV-Puls zurück in den **BBO**-Kristall reflektiert, wo er ein weiteres EPR-Paar erzeugt, das in die Moden **c** und **d** emittiert wird und ebenfalls durch *Monomodens*-Glasfasern in den Zustand $|\phi^+\rangle_{\mathbf{cd}}$ übergeht.

Während die Photonen in den Moden **a** und **d** über Interferenzfilter **IF** ($\Delta\lambda = 3nm$) direkt zur Polarisations-Analyse gelangen, werden die beiden Photonen in den Moden **b** und **c**, auf die wir die Phasengatter-Transformation anwenden müssen, auf einem speziellen **Strahlteiler** \mathcal{PST} , der die zentrale Rolle für das Phasengatter spielt, zur Interferenz gebracht. Nach einer polarisationsabhängigen Abschwächung durch die beiden **Strahlteiler-Plättchen** $\mathcal{PSTP}_{1/2}$ wird hinter den Interferenzfiltern **IF** ($\Delta\lambda = 2nm$) ebenfalls eine Polarisations-Analyse durchgeführt, zu der das **Halbwellen-Plättchen** ($\lambda/2$) und **Viertelwellen-Plättchen** ($\lambda/4$) sowie ein polarisierender Strahlteiler **PBS** gehören.

Wir werden uns zunächst mit der Erzeugung der beiden EPR-Paare genauer befassen und anschließend detailliert auf das Phasengatter eingehen.

2.1 Erzeugung zweier EPR-Paare mit gepulster Typ-II Downconversion

Als Quelle für polarisationsverschränkte Photonen verwenden wir spontane parametrische Fluoreszenz in einem BBO-Kristall (β -Barium Borat) mit Typ-II Phasenanpassung, eine Methode, die schon in zahlreichen Experimenten verwendet wurde [27, 28, 29].

Dabei verwenden wir als Pumplaser einen frequenzverdoppelten, gepulsten Ti:Sa-Laser mit einer zentralen Wellenlänge von $390nm$ und einer mittleren Leistung von ca. $700mW$ (Abbildung 2.2). Die Pulslänge beträgt $130fs$ bei einer Wiederholungsrate von $82MHz$.

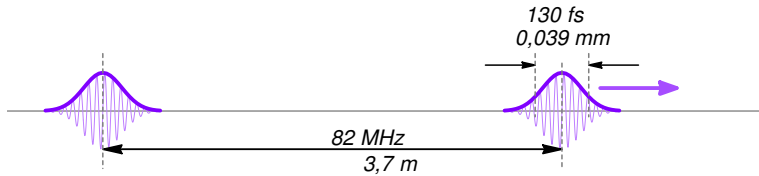


Abbildung 2.2: Frequenzverdoppelter Ti:Sa-Laser mit Wellenlänge $\lambda = 390nm$ und mittlerer Leistung $P = 700mW$.

Bei der spontanen parametrischen Fluoreszenz wird ein Pump-Photon in einem spontanen, nicht-linearen Prozess in zwei infrarote Photonen umgewandelt. Diese haben durch die Typ-II Phasenanpassung [30, 27] ordentliche bzw. außerordentliche Polarisierung, was in unserem Experiment $|V\rangle$ bzw. $|H\rangle$ entspricht.

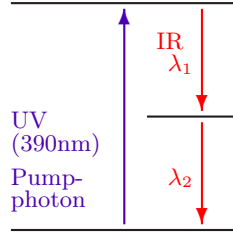


Abbildung 2.3: Energieerhaltung bei der spontanen parametrischen Fluoreszenz:

$$\frac{1}{390nm} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}.$$

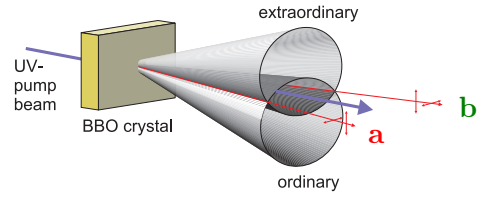


Abbildung 2.4: Emissionskegel für ordentliche und außerordentliche bzw. $|V\rangle$ - und $|H\rangle$ -polarisierte Photonen mit Schnittgeraden **a** und **b**.

Aufgrund der Energieerhaltung (Abbildung 2.3) und der Impulserhaltung können die beiden Photonen, abhängig von ihren Polarisierungen und Wellenlängen, nur jeweils in einen kegelförmigen Raumwinkelbereich emittiert werden. Bei geeigneter Orientierung des BBO-Kristalls überlappen sich die Emissionskegel für die beiden Polarisierungen, so dass zwei Schnittgeraden **a** und **b** existieren (Abbildung 2.4). Selektieren wir nun alle Photonen, die sich entlang dieser beiden Geraden bewegen, indem wir dort in eine *Monomoden*-Glasfaser einkoppeln, so wählen wir über den Raumwinkelbereich auch gleichzeitig bestimmte Wellenlängen-Bereiche. In unserem Experiment betrachten wir den entarteten Fall, bei dem die mittlere Wellenlänge für beide Photonen bei $\lambda = 780nm$ liegt. Da wir durch die *Monomoden*-Glasfaser nur Photonen einsammeln, die sich entlang der Schnittgeraden bewegen, ist es nicht mehr möglich zu unterscheiden, aus welchem Emissionskegel das Photon stammt und welche Polarisierung es hat. Wir wissen nur, dass das eine Photon die zum anderen Photon orthogonale Polarisierung haben muss. Dadurch erhalten wir als Zustand $|\psi\rangle$ eine Superposition der beiden Möglichkeiten:

$$|\psi\rangle = |H\rangle_{\mathbf{a}} \otimes |V\rangle_{\mathbf{b}} + e^{i\phi} |V\rangle_{\mathbf{a}} \otimes |H\rangle_{\mathbf{b}}$$

Durch zwei doppelbrechende Kristalle vor den beiden Faserkopplern kann die Phase ϕ angepasst werden, so dass wir den Zustand

$$|\phi^+\rangle = |HH\rangle_{\mathbf{ab}} + |VV\rangle_{\mathbf{ab}}$$

erzeugen können. Dazu müssen wir die beiden Glasfasern, die zur Polarisations-Analyse führen, so „einstellen“, dass die Polarisationen $|H\rangle$ und $|V\rangle$ erhalten bleiben, während wir mit den beiden Glasfasern, die in das Phasengatter führen, die beiden Polarisationen $|H\rangle$ und $|V\rangle$ gegeneinander vertauschen ($|H\rangle \rightarrow |V\rangle$, $|V\rangle \rightarrow |H\rangle$). Diese „Einstellung“ der Glasfasern können wir durch die geeignete Positionierung von drei beweglichen Faserschlaufen erreichen, in denen durch Spannungsdoppelbrechung eine polarisationsabhängige Phase erzeugt wird. Der Zustand $|\phi^+\rangle$, der auf diese Weise erzeugt wird, weist in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis Korrelationen von $\mathcal{K}_{\hat{\sigma}_x} \approx 0,94$ und in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis von $\mathcal{K}_{\hat{\sigma}_z} \approx 0,98$ auf.

Da wir aber zur Erzeugung des *Cluster-Zustands* $|\mathcal{C}_4^\odot\rangle$ zwei $|\phi^+\rangle$ benötigen und wir ein zweites identisches Setup vermeiden wollen, bietet es sich an, den Pumplaser mit einem UV-Spiegel in den BBO-Kristall zurück zu reflektieren. Dadurch wird ein zweites Photonen-Paar in der „Rückwärtsrichtung“ in den Moden **c** und **d** erzeugt (Abbildung 2.5).

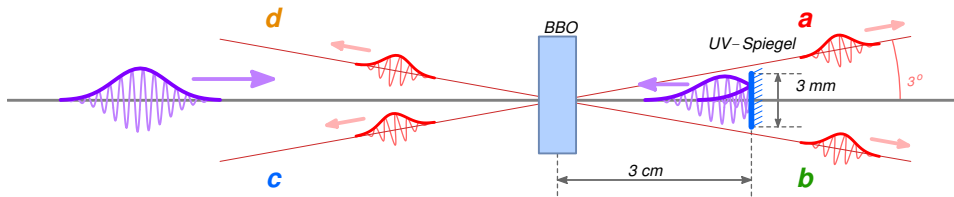


Abbildung 2.5: Erzeugung eines zweiten EPR-Paares durch Reflexion des Pumplasers mit Hilfe eines UV-Spiegels.

Um die Strahltaile des Pumplasers für beide Kristall-Durchgänge möglichst nahe am BBO-Kristall zu haben, muss der Spiegel, im Vergleich zur Rayleigh-Länge von $\approx 30\text{cm}$, nahe an den BBO-Kristall herangebracht werden, da wir zusätzliche optische Elemente vermeiden wollen. Er darf aber gleichzeitig die in „Vorwärtsrichtung“ erzeugten Photonen nicht beeinträchtigen, weshalb seine Breite durch den Öffnungswinkel von $\approx 3^\circ$, unter dem die verschränkten Photonen emittiert werden, begrenzt wird (Abbildung 2.5). Also wählen wir für diesen Spiegel eine Breite von 3mm um ihn in einer Entfernung von 3cm vom BBO positionieren zu können.

Auf diese Weise können wir jeweils ca. 1700 bzw. 1200 EPR-Paare/Sekunde in den Moden **a** und **b**, sowie in **c** und **d** detektieren (Tabelle 2.2). Der Grund für die niedrigere Zählrate in den Moden **c** und **d** liegt hauptsächlich in dem Verlust an Intensität, den der UV-Puls durch Streuung beim Durchlaufen des BBO-Kristalls erleidet.

Die Detektion findet in der Koinzidenz-Basis statt. Das bedeutet, dass nur diejenigen Paare gezählt werden, bei denen beide Photonen innerhalb eines

Mode	Zählrate
a	83 000 /s
b	25 000 /s
c	21 000 /s
d	63 000 /s

Tabelle 2.1: Zählraten für Einzel-Photon-Detektionen in den verschiedenen Moden.

Moden	Koinzidenz-Zählrate
a b	1 700 /s
c d	1 200 /s
b c	6,9 /s
a b c d	2,9/min

Tabelle 2.2: Gemessene Zählraten für Koinzidenzen zwischen mehreren Moden.

zeitlichen Koinzidenzfensters in zwei unterschiedlichen Moden vom Detektor erfasst werden. Das Koinzidenzfenster ist mit $4ns^1$ so groß gewählt, dass leicht unterschiedliche Weglängen von der Erzeugung bis zur Detektion keine Rolle spielen, dass aber Photonen, die aus verschiedenen UV-Pulsen stammen und dadurch einen Abstand von $12ns$ haben, keine Koinzidenz erzeugen können.

Durch die Detektion in der Koinzidenz-Basis können wir den Beitrag von Einzel-Photonen vernachlässigen, die entweder nicht paarweise emittiert wurden oder deren Partner-Photon nicht detektiert wurde. Das sehen wir an der folgenden Überlegung:

Die Einzel-Photon-Zählrate liegt bei ca. $s_1 \approx 73\,000$ Photonen pro Sekunde für die Moden **a** und **d** und bei ca. $s_2 \approx 23\,000$ pro Sekunde für Moden **b** und **c** (Tabelle 2.1). Auf $z = 8,2 \times 10^7$ UV-Pulse pro Sekunde verteilt ergibt das eine Erzeugungswahrscheinlichkeit von $P_1 = \frac{s_1}{z} \approx 8,9 \times 10^{-4}$ und $P_2 = \frac{s_2}{z} \approx 2,8 \times 10^{-4}$ pro Puls. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei unabhängige Photonen in den Moden **a** und **b** bzw. **d** und **c** mit dem gleichen UV-Puls erzeugt werden, liegt demnach bei $P_1 \times P_2 = 2,5 \times 10^{-7}$, woraus sich eine Zählrate von $\approx 20,5/s$ für zufällige Koinzidenzen ergibt, die vernachlässigbar gegenüber den korrelierten Photonen-Paaren ($\approx 1\,500/s$) ist.

Um die zwei EPR-Paare, die von unserer Quelle (Abbildung 2.6) im Zustand $|\phi^+\rangle$ erzeugt werden, in den *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_4^\odot\rangle$ zu transformieren, benötigen wir jetzt noch den zweiten wichtigen Bestandteil des Experiments, das Phasengatter.

¹ $4ns \Leftrightarrow 1,2m$

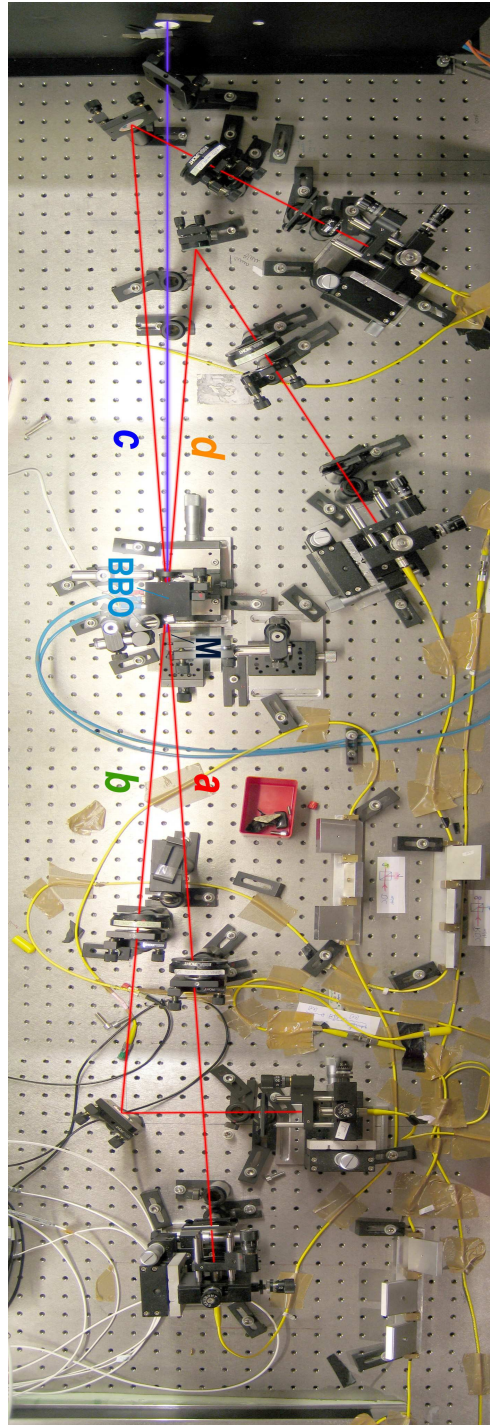


Abbildung 2.6: Photographie der Quelle, mit der zwei verschränkte Photonen-Paare im Zustand $|\phi^+\rangle$ erzeugt werden.

2.2 Das Phasengatter

Wegen der sehr schwachen Photon-Photon-Wechselwirkung ist es schwierig, ein kontrolliertes Phasengatter zu realisieren. Es gibt jedoch eine Möglichkeit, die ausschließlich auf linearer Optik basiert. Die Idee ist der von RALPH et al. [31] sehr ähnlich, jedoch etwas vereinfacht.

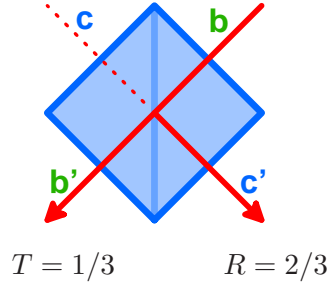


Abbildung 2.7: Der Strahlteiler \mathcal{ST} .

Um die Funktionsweise des Phasengatters zu erläutern, betrachten wir einen Strahlteiler \mathcal{ST} (Abbildung 2.7) mit Eingangsmoden \mathbf{b} und \mathbf{c} und Ausgangsmoden \mathbf{b}' und \mathbf{c}' . Er besitzt die Eigenschaft, dass Photonen, die sich in den Moden \mathbf{b} oder \mathbf{c} befinden, mit der Wahrscheinlichkeit $T = 1/3$ transmittiert und dementsprechend mit Wahrscheinlichkeit $R = 2/3$ reflektiert werden.

Die Transformation dieses Strahlteilers, mit \hat{b}^\dagger und \hat{c}^\dagger als den Erzeuger-Operatoren eines Photons in den Moden \mathbf{b} und \mathbf{c} , lautet:

$$\begin{aligned}\hat{b}^\dagger &\xrightarrow{\mathcal{ST}} (\sqrt{\frac{1}{3}}\hat{b}'^\dagger + i\sqrt{\frac{2}{3}}\hat{c}'^\dagger) \\ \hat{c}^\dagger &\xrightarrow{\mathcal{ST}} (\sqrt{\frac{1}{3}}\hat{c}'^\dagger + i\sqrt{\frac{2}{3}}\hat{b}'^\dagger)\end{aligned}$$

Wir lassen nun an diesem Strahlteiler zwei Photonen aus beiden Eingangsmoden miteinander interferieren, weshalb wir auch von einem Überlappstrahlteiler sprechen werden. Es handelt sich dabei um eine Interferenz zweiter Ordnung. Das bedeutet, dass der Fall „beide Photonen werden transmittiert“ mit dem Fall „beide Photonen werden reflektiert“ interferiert. Außerdem verwenden wir, dass die Analyse in der Koinzidenz-Basis stattfindet, weshalb nur Koinzidenzen zwischen den Moden b' und c' beobachtet werden. Aus diesem Grund liefern die Terme $\hat{b}'^\dagger\hat{b}'^\dagger$ und $\hat{c}'^\dagger\hat{c}'^\dagger$, bei denen zwei Photonen in Mode \mathbf{b} aber keines in \mathbf{c} detektiert werden bzw. umgekehrt, keinen Beitrag. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\hat{b}^\dagger\hat{c}^\dagger &= \xrightarrow{\mathcal{ST}} (\sqrt{\frac{1}{3}}\hat{b}'^\dagger + i\sqrt{\frac{2}{3}}\hat{c}'^\dagger)(\sqrt{\frac{1}{3}}\hat{c}'^\dagger + i\sqrt{\frac{2}{3}}\hat{b}'^\dagger) = \\ &= \frac{1}{3}\hat{b}'^\dagger\hat{c}'^\dagger - \frac{2}{3}\hat{c}'^\dagger\hat{b}'^\dagger + i\sqrt{\frac{2}{3}}(\hat{b}'^\dagger\hat{b}'^\dagger + \hat{c}'^\dagger\hat{c}'^\dagger) \\ &\xrightarrow{\text{Koinzidenzen}} -\frac{1}{3}\hat{b}'^\dagger\hat{c}'^\dagger\end{aligned}\tag{2.4}$$

Wir haben also auf diese Weise eine Phase π auf dem Eingangszustand erzeugt. Falls wir diese Phase auch polarisationsabhängig erzeugen können, sind wir am Ziel.

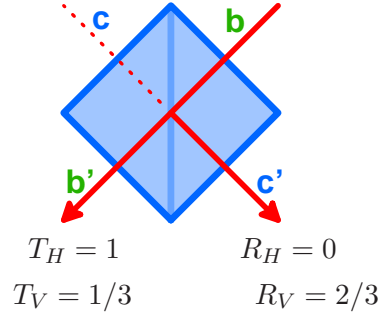


Abbildung 2.8: Der polarisationsabhängige Strahlteiler \mathcal{PST} .

Darum modifizieren wir die Eigenschaften des Strahlteilers noch weiter. Für $|V\rangle$ soll weiterhin $T_V = 1/3$ und $R_V = 2/3$ gelten, für $|H\rangle$ jedoch soll $T_H = 1$ sein. Jetzt müssen wir nur noch zeigen, dass ein solcher Strahlteiler, den wir mit \mathcal{PST} (Abbildung 2.8) bezeichnen wollen, die gewünschten Eigenschaften hat.

\mathcal{PST}			
$\hat{b}_H^\dagger \hat{c}_H^\dagger$	$\xrightarrow{\mathcal{PST}}$	$\hat{b}'_H^\dagger \hat{c}'_H^\dagger$	
$\hat{b}_H^\dagger \hat{c}_V^\dagger$	$\xrightarrow{\mathcal{PST}}$	$\hat{b}'_H^\dagger (\sqrt{\frac{1}{3}} \hat{c}'_V^\dagger + i\sqrt{\frac{2}{3}} \hat{b}'_V^\dagger)$	$\xrightarrow{\text{Koinzidenzen}}$ $\sqrt{\frac{1}{3}} \hat{b}'_H^\dagger \hat{c}'_V^\dagger$
$\hat{b}_V^\dagger \hat{c}_H^\dagger$	$\xrightarrow{\mathcal{PST}}$	$(\sqrt{\frac{1}{3}} \hat{b}'_V^\dagger + i\sqrt{\frac{2}{3}} \hat{c}'_V^\dagger) \hat{c}'_H^\dagger$	$\xrightarrow{\text{Koinzidenzen}}$ $\sqrt{\frac{1}{3}} \hat{b}'_V^\dagger \hat{c}'_H^\dagger$
$\hat{b}_V^\dagger \hat{c}_V^\dagger$	$\xrightarrow{\mathcal{PST}}$	Analog zu (Gl.2.4)	$\xrightarrow{\text{Koinzidenzen}}$ $-\frac{1}{3} \hat{b}'_V^\dagger \hat{c}'_V^\dagger$

Wie wir sehen, bekommen wir, wie erwünscht, nur für den $|VV\rangle$ -Term eine Phase. Wir haben damit die richtige Transformation durchgeführt. Allerdings müssen die unterschiedlichen Koeffizienten noch angeglichen werden.

Zu diesem Zweck befinden sich die zwei Strahlteiler-Plättchen $\mathcal{PST}\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{PST}\mathcal{P}_2$ in den beiden Ausgangsmoden \mathbf{b}' und \mathbf{c}' . Diese entsprechen in ihren Eigenschaften dem um 90° gedrehten \mathcal{PST} , so dass wir in Transmission folgende Transformation erreichen:

$$|V\rangle \rightarrow |V\rangle \quad \text{und} \quad |H\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} |H\rangle$$

Für zwei Photonen in den Moden \mathbf{b}' und \mathbf{c}' erhalten wir durch die Strahlteiler-Plättchen dann folgende Transformation:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{PST}\mathcal{P}_{1/2} \\
\hline
\hat{b}'_H \hat{c}'_H \xrightarrow{\mathcal{PST}} \frac{1}{3} \hat{b}'_H \hat{c}'_H \\
\hat{b}'_H \hat{c}'_V \xrightarrow{\mathcal{PST}} \sqrt{\frac{1}{3}} \hat{b}'_H \hat{c}'_V \\
\hat{b}'_V \hat{c}'_H \xrightarrow{\mathcal{PST}} \sqrt{\frac{1}{3}} \hat{b}'_V \hat{c}'_H \\
\hat{b}'_V \hat{c}'_V \xrightarrow{\mathcal{PST}} \hat{b}'_V \hat{c}'_V \\
\hline
\end{array}$$

Die reflektierte Mode des Strahlteiler-Plättchens wird dabei nicht berücksichtigt, da wir nur an einer polarisationsabhängigen Abschwächung interessiert sind. Für den Überlappstrahlteiler \mathcal{PST} und die beiden Strahlteiler-Plättchen $\mathcal{PST}\mathcal{P}_{1/2}$ zusammen lautet die Operation des Gatters dann folgendermaßen:

$$\mathcal{PST} \cdot \mathcal{PST}\mathcal{P}_{1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \hat{P}\hat{G} \quad (2.5)$$

$$\hat{\rho} \longrightarrow \frac{1}{9} \hat{P}\hat{G} \hat{\rho} \hat{P}\hat{G} \quad (2.6)$$

Betrachten wir die Gatter-Operation, so fällt auf, dass aufgrund der Amplitude $\frac{1}{3}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Eingangszustand korrekt transformiert wird nur $\frac{1}{9}$ beträgt. Unser Phasengatter arbeitet also probabilistisch. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{8}{9}$ befinden sich beide Photonen in der gleichen Ausgangsmode, weshalb es zu keiner Koinzidenz kommen kann. Darum wird die Qualität des Gatters nicht beeinträchtigt, wenn wir in der Koinzidenz-Basis analysieren.

Das vollständige Phasengatter ist in Abbildung 2.9 abgebildet. Es sind darin zusätzlich einige Komponenten der Polarisations-Analyse dargestellt, wie die Halbwellen-Plättchen ($\lambda/2$), Viertelwellen-Plättchen ($\lambda/4$) und Interferenzfilter (IF) der Breite $\Delta\lambda = 2nm$, sowie polarisierende Strahlteiler (PBS). Die Wellen-Plättchen ermöglichen die Wahl der Polarisation, die mit dem polarisierende Strahlteiler (PBS) analysiert wird. Auf die Bedeutung der Interferenzfilter werden wir im nächsten Abschnitt genauer eingehen.

Um auch einen Eindruck vom realen Phasengatter zu vermitteln, ist in Abbildung 2.10 eine Photographie des Aufbaus zu sehen.

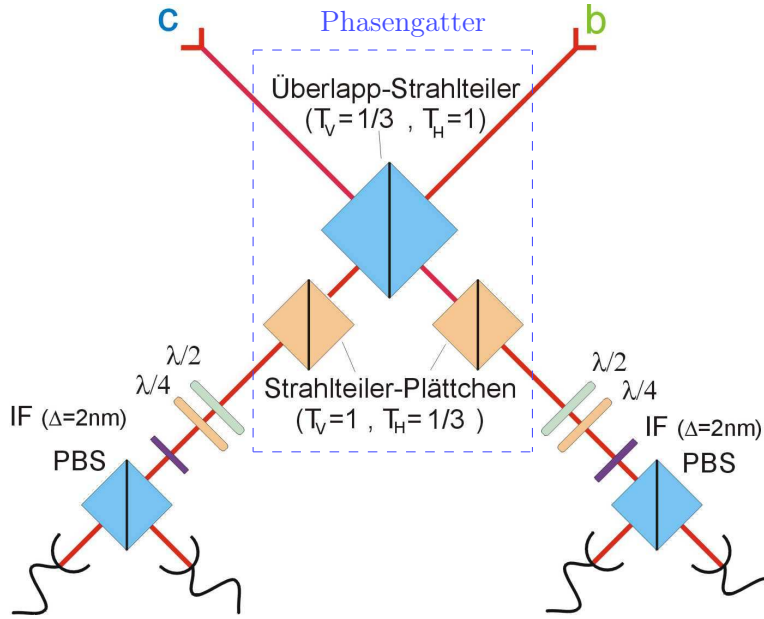


Abbildung 2.9: Schematischer Aufbau des Phasengatters mit Polarisationsanalyse.

2.2.1 Eigenschaften des Phasengatters

Das Phasengatter kann jedoch nicht nur als solches verwendet werden, sondern kann auch zur *vollständigen* BELL-Zustands-Analyse genutzt werden. Wie wir in Gleichung (1.18) schon gesehen haben, transformiert das Phasengatter den separablen Zustand $|++\rangle$ in den verschränkten Zustand $|\phi_{\odot}^+\rangle = |H+\rangle + |V-\rangle$. Da es sich um eine unitäre Transformation handelt, lässt sie sich auch umkehren, indem wir das Phasengatter auf $|\phi_{\odot}^+\rangle = |H+\rangle + |V-\rangle$ anwenden und den separablen Zustand $|++\rangle$ erhalten. Untersuchen wir die Ergebnisse auch für die folgenden drei verschränkten Zustände, so erhalten wir immer einen separablen Zustand:

$$\begin{aligned}
 |\phi_{\odot}^+\rangle &= |H+\rangle + |V-\rangle \xrightarrow{\hat{P}G} |++\rangle \\
 |\phi_{\odot}^-\rangle &= |H+\rangle - |V-\rangle \xrightarrow{\hat{P}G} | - + \rangle \\
 |\psi_{\odot}^+\rangle &= |H-\rangle + |V+\rangle \xrightarrow{\hat{P}G} | + - \rangle \\
 |\psi_{\odot}^-\rangle &= |H-\rangle - |V+\rangle \xrightarrow{\hat{P}G} | - - \rangle
 \end{aligned}$$

Somit sind wir in der Lage, durch Messungen in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis alle vier BELL-Zustände anhand der jeweiligen Koinzidenz voneinander zu unterscheiden. Wir können das Phasengatter also zur *vollständigen* BELL-Zustands-Analyse

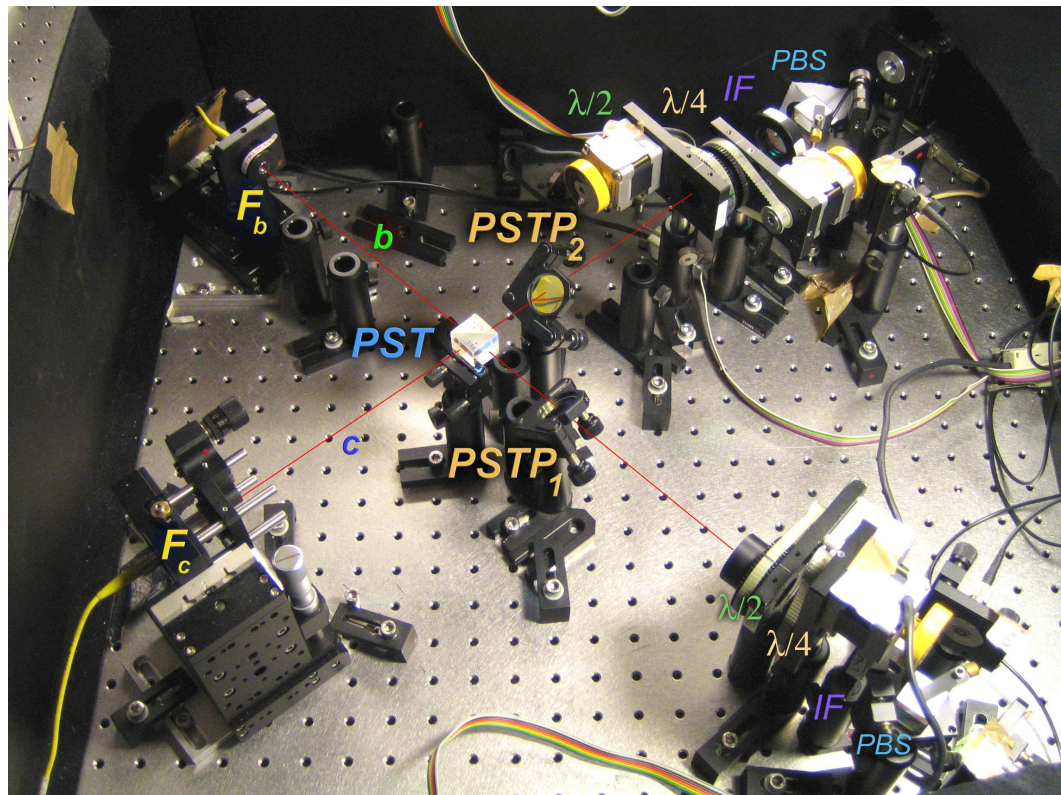


Abbildung 2.10: Photographie des realen Phasengatters: Die Glasfasern F_b und F_c leiten die Photonen, die in der Quelle (Kapitel 2.1) erzeugt werden, in das Phasengatter. PST bezeichnet den Überlappstrahlteiler und $PSTP_{1/2}$ die beiden Strahlteiler-Plättchen in den Moden b und c . Zur Polarisationsanalyse gehören die beiden $\lambda/2$ - und $\lambda/4$ -Plättchen, sowie die Interferenzfilter IF und der polarisierende Strahlteiler PBS .

verwenden, was für verschiedene Anwendungen in der Quanteninformation sehr nützlich ist. Zum Beispiel ermöglicht es uns ein *Verschränkungstransfer*-Experiment durchzuführen, auf das wir in Kapitel 4 noch einmal kurz eingehen werden.

Die Effizienz für eine *vollständige* BELL-Zustands-Analyse liegt, wie wir oben schon gesehen haben, bei $\frac{1}{9}$. Das erscheint auf den ersten Blick wenig, doch ist derzeit kein Experiment bekannt, das mit linearer Optik alle vier BELL-Zustände unterscheiden kann und dabei eine höhere Effizienz als $\frac{1}{4}$ erreicht. Außerdem können diese optimalen BELL-Zustands-Analysatoren nicht als Phasengatter verwendet werden, was aber für unser Experiment erforderlich ist.

Bisher sind wir immer von perfekten Komponenten und perfekter Justage ausgegangen. Ein reales Phasengatter mit nicht-perfekter Transformation $\hat{P}\hat{G}^*$ wird aber immer davon abweichen. Deshalb ist es wichtig, die Konsequenzen verschiedener Faktoren zu untersuchen, die sich in unterschiedlichem Maße auf die Phasengatter-Transformation auswirken.

Das wichtigste Element des Phasengatters ist der Strahlteiler \mathcal{PST} , denn an ihm müssen die beiden Photonen zur Interferenz gebracht werden. Einflüsse wie unterschiedliche Spektren, versetzte Ankunftszeiten am Strahlteiler und nicht perfekte räumliche Modenanpassung machen die Photonen unterscheidbar und damit die Interferenz schlechter.

Um die Spektren beider Photonen anzugleichen, verwenden wir die im letzten Abschnitt schon angesprochenen Interferenzfilter. Das ist vor allem dann wichtig, wenn die spontane parametrische Fluoreszenz mit einem gepulsten Laser betrieben wird, da dann das Spektrum, das in eine *Monomoden*-Glasfaser eingekoppelt wird, für ordentlich polarisierte Photonen gegenüber außerordentlich polarisierten verbreitert ist [32, 33, 34].

Außerdem garantieren die schmalen Interferenzfilter mit einer spektralen Breite von $\Delta\lambda = 2nm$, dass die beiden Photonen in den Moden **b** und **c**, die unabhängig voneinander, aber von einem einzigen Pump-Puls, erzeugt werden, auch innerhalb ihrer Kohärenzlänge gleichzeitig am Strahlteiler ankommen. Einer Breite von $\Delta\lambda = 2nm$ bei einer zentralen Wellenlänge von $\lambda = 780nm$ entspricht, wie sich aus Gleichung (2.7) berechnen lässt [35], einer Kohärenzlänge von $\Delta t = 160fs$ oder $\Delta x = 50\mu m$.

$$\Delta E \times \Delta t \gtrsim \hbar \quad \Rightarrow \quad \Delta t \gtrsim \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta\lambda} \approx 160fs \sim 50\mu m \quad (2.7)$$

Trotz dieser Maßnahmen kann nicht verhindert werden, dass die Interferenz durch andere Einflüsse beeinträchtigt wird. Wir müssen darum die Auswirkungen auf die Phasengatter-Transformation untersuchen.

Nehmen wir den extremen Fall an, dass es keine Interferenz zwischen den beiden Photonen gibt, und betrachten die Transformation auf verschiedene Eingangszustände, so fällt eine Überhöhung des $|VV\rangle$ -Terms auf:

$$\begin{aligned} (T_H T_H + R_H R_H) &= \left(\frac{1}{3} \frac{1}{3} + 0\right) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{9} |HH\rangle\langle HH| \\ (T_H T_V + R_H R_V) &= \left(\frac{1}{3} \frac{1}{3} + 0\right) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{9} |HV\rangle\langle HV| \\ (T_V T_H + R_V R_H) &= \left(\frac{1}{3} \frac{1}{3} + 0\right) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{9} |VH\rangle\langle VH| \\ (T_V T_V + R_V R_V) &= \left(\frac{1}{3} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{2}{3}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{5}{9} |VV\rangle\langle VV| \end{aligned}$$

Zustände, die mit einer nicht-perfekten Interferenz erzeugt werden, weisen darum einen überhöhten $|VV\rangle$ -Anteil auf, den wir als *Rauschen* bezeichnen wollen. In Kapitel 3 werden wir das auch am $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$ beobachten können.

Um die Konsequenzen einer nicht-perfekten Interferenz detaillierter betrachten zu können, müssen wir die Qualität der Interferenz quantifizieren. Dazu verwenden wir die *Visibility* V des Hong-Ou-Mandel Dips [36], der in Kapitel 2.2.4 genauer besprochen wird. Für den Augenblick ist es aber ausreichend, wenn wir sie als Maß für die Überhöhung des VV -Terms mit $V = \frac{\frac{5}{9}-x}{\frac{5}{9}-\frac{1}{9}}$ betrachten, wobei x gegeben ist durch:

$$|VV\rangle\langle VV| \xrightarrow{PG^*} x \cdot |VV\rangle\langle VV|$$

Tragen wir die bereits in Kapitel 1.3.3 eingeführte *Prozess-Fidelity* $F_P = Sp(\underline{\chi} \cdot \underline{\chi}^{[ideal]})$ in Abhängigkeit von V auf (Abbildung 2.11), so erkennen wir eine starke Abhängigkeit, besonders bei einer *Visibility* V nahe eins. Eine realistische Annahme für eine Interferenz auf einem Strahlteiler-Würfel ist eine *Visibility* von $V \approx 0.9$. Das entspricht einer deutlichen Verschlechterung der *Prozess-Fidelity*, weshalb die *Visibility* V einer der wichtigsten Faktoren ist, die die Qualität des Gatters bestimmen.

Interessant ist, dass auch ohne Interferenz ($V = 0$) die *Prozess-Fidelity* nicht auf null absinkt. Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, die richtige Transformation durchzuführen, nicht vollständig verschwindet. Der Grund dafür ist, dass wir ohne eine Interferenz die Kohärenz des Eingangszustands zerstören, da wir eine inkohärente Mischung aus den beiden unterscheidbaren Fällen „beide Photonen werden transmittiert“ und „beide Photonen werden reflektiert“ bekommen. Dadurch erhalten wir für den letzteren Fall immer noch eine Phase von π auf dem Zustand $|VV\rangle$. Die Phasengatter-Transformation wird sozusagen immer noch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit durchgeführt.

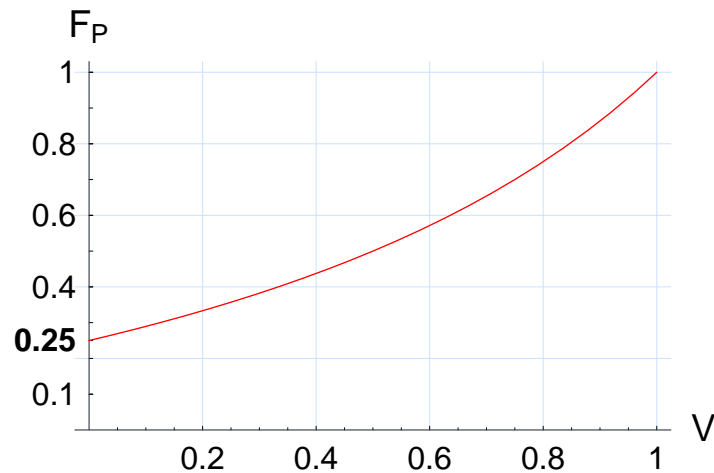


Abbildung 2.11: *Prozess-Fidelity* F_P in Abhängigkeit von der HOM-Dip *Visibility* V .

Neben der *Visibility* wollen wir auch andere Einflüsse auf die Qualität der Gatter-Operation untersuchen. Beispielsweise werden wir die Reflexions- und Transmissions-Wahrscheinlichkeiten variieren.

Betrachten wir dazu zunächst den Überlappstrahlteiler \mathcal{PST} . Die Transmissions-Wahrscheinlichkeit T_V für $|V\rangle$ -polarisierte Photonen sollte für die ideale Phasengatter-Transformation bei $\frac{1}{3}$ liegen. Betrachten wir T_V aber als freien Parameter der Gatter-Transformation, so bekommen wir folgendes:

$$\hat{\rho} \longrightarrow \hat{T} \hat{\rho} \hat{T} \quad \text{mit} \quad \hat{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{T_V}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{T_V}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 + 2 T_V \end{pmatrix}$$

Berechnen wir daraus die zugehörige *Prozess-Fidelity* F_P in Abhängigkeit von T_V (Abbildung 2.12), so können wir sehen, dass schon kleine Abweichungen vom Idealwert, der wie erwartet am Maximum der Funktion bei $\frac{1}{3}$ liegt, eine starke Verschlechterung in der *Prozess-Fidelity* bewirken.

Auch die Transmission T_H^P der Strahlteiler-Plättchen für $|H\rangle$ hat Einfluss auf die Güte des Phasengatters, wenn auch keinen so starken, wie es beim Überlappstrahlteiler der Fall ist. Dies ist aus der von T_H^P abhängigen Transformation

$$\hat{\rho} \longrightarrow \hat{W} \hat{\rho} \hat{W} \quad \text{mit} \quad \hat{W} = \begin{pmatrix} T_H^P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{T_H^P}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{T_H^P}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

und der daraus resultierenden *Prozess-Fidelity* $F_P(T_H^P)$ (Abbildung 2.13) zu erkennen.

Um die Auswirkungen nicht-perfekter Eigenschaften des Überlappstrahlteilers und der Strahlteiler-Plättchen für die Gatter-Transformation auf unser Experiment zu beziehen, werden wir jetzt die experimentellen Eigenschaften der genannten Komponenten betrachten.

2.2.2 Eigenschaften der Komponenten

Da wir im vorhergehenden Abschnitt gesehen haben, dass der Überlappstrahlteiler und die Strahlteiler-Plättchen die zentrale Rolle für die Funktionalität des Phasengatters spielen, werden wir ihre Eigenschaften prüfen und versuchen, möglichst optimale Parameter für unsere Anforderungen zu finden.

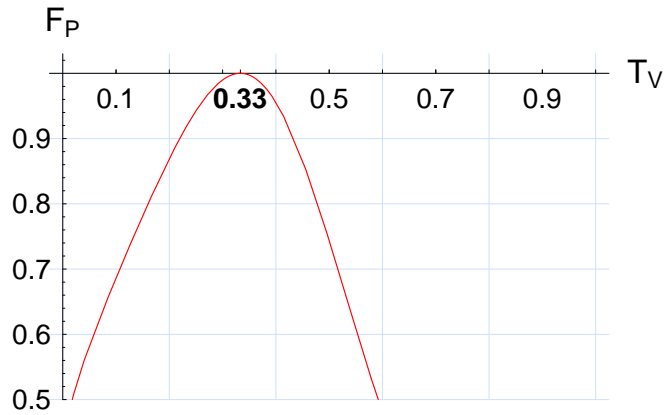


Abbildung 2.12: Prozess-Fidelity F_P in Abhängigkeit von T_V für den Strahlteiler \mathcal{PST} .

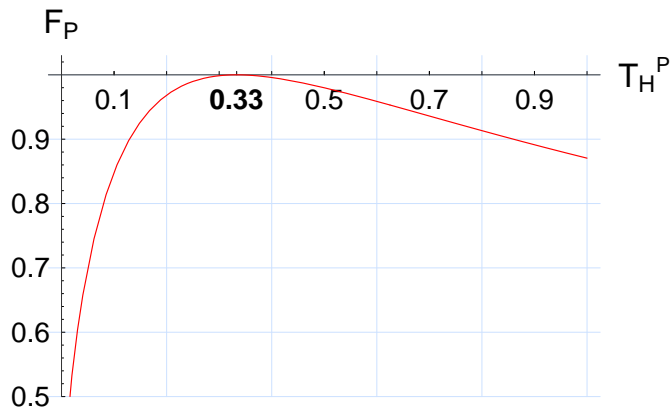


Abbildung 2.13: Prozess-Fidelity F_P in Abhängigkeit von T_H^P des Strahlteiler-Plättchens.

2.2.2.1 Der Überlappstrahlteiler

Wir haben im letzten Abschnitt gezeigt, dass die idealen Parameter für den Überlappstrahlteiler $T_H = 1$ und $T_V = \frac{1}{3}$ sind. Das entspricht, falls wir Absorption vernachlässigen, einem Verhältnis von $\frac{R_H}{T_H} = \frac{0}{1} = 0$ für $|H\rangle$ -polarisierte Photonen und von $\frac{R_V}{T_V} = \frac{2}{1} = 2$ für $|V\rangle$ -polarisierte Photonen. Diese Verhältnisse lassen sich experimentell einstellen, indem wir die Intensitäten in jedem der beiden Ausgangsmoden des Strahlteilers messen.

Die Eigenschaften des Strahlteiler-Würfels werden von der dielektrischen Grenzfläche bestimmt, die in ihm enthalten ist, jedoch spielt auch der Winkel, unter dem Licht einfällt, eine Rolle. Darum wollen wir das Aufteilungs-

verhältnis in Abhängigkeit von einer Drehung des Strahlteilers untersuchen, wobei wir den Normalenvektor der Grenzfläche mit \vec{N}_G und ihre Achsen mit \vec{s} und \vec{p} (Abbildung 2.14) bezeichnen.

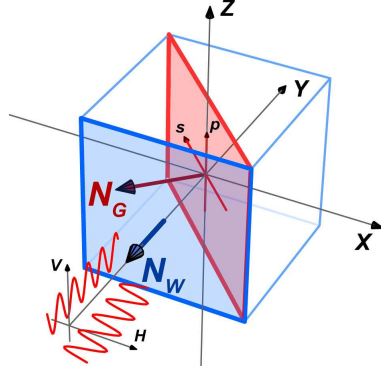
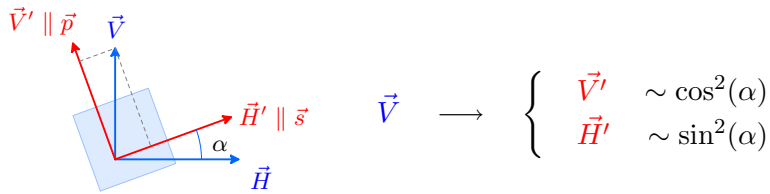


Abbildung 2.14: Koordinatensystem für die Justage des Strahlteilers PST .

Bei der Untersuchung der Abhängigkeiten müssen wir allerdings nicht alle drei Freiheitsgrade der Rotation des Würfels berücksichtigen, da wir zusätzlich fordern, dass die vertikale Grenzflächen-Achse \vec{p} parallel zur Polarisationsrichtung \vec{V} liegen soll.

$$\text{Symmetrie} \iff \vec{p} \parallel \vec{V}$$

Das bedeutet, dass der Strahlteilerwürfel symmetrisch bezüglich des Koordinatensystems, das durch $|H\rangle$ und $|V\rangle$ festgelegt wird, ausgerichtet ist. Diese Bedingung ist wichtig für die Erhaltung der Polarisationsrichtung, da die Polarisierungsebenen der beiden Ausgangspolarisationen $|H'\rangle$ und $|V'\rangle$ von den Vektoren \vec{s} und \vec{p} festgelegt werden.



Diese Bedingung ist äquivalent mit den Bedingungen, dass N_W parallel zur Strahlausbreitungsrichtung ist und dass N_G in der Ebene, die von der Eingangspolarisation $|H\rangle$ und der Strahlausbreitungsrichtung \vec{Y} definiert wird, liegt. Die erste Bedingung können wir näherungsweise erfüllen, indem wir die Reflexion von der Vorderfläche des Strahlteiler-Würfels zur Justage benutzen und sie zur Deckung mit dem einfallenden Strahl bringen, wodurch die Drehung um die X-Achse (Abbildung 2.14) festgelegt ist. Die zweite, wesentlich wichtigere Bedingung ist erfüllt, wenn wir darauf achten, dass der einfallende Strahl auf der gleichen Höhe liegt wie der reflektierte

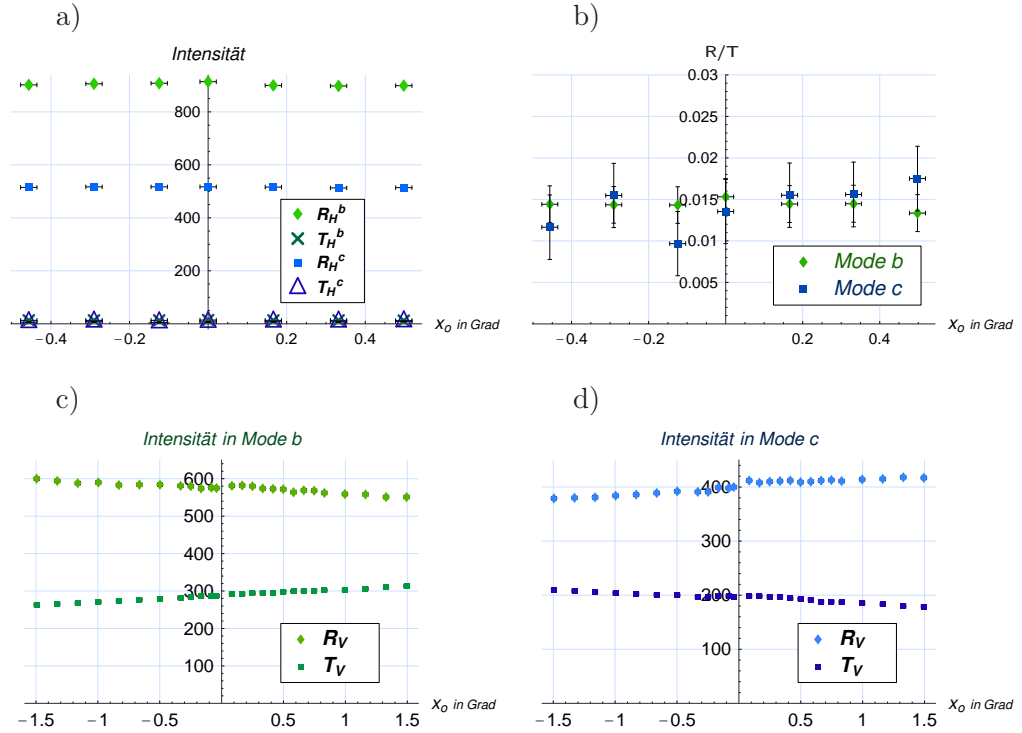


Abbildung 2.15: Transmission und Reflexion in Abhängigkeit von einer Rotation des \mathcal{PST} um die Z-Achse für die beiden Eingangsmoden **b** und **c**.

- a) Intensitäten für R_H und T_H bei Eingangspolarisation $|H\rangle$.
b) Verhältnis von Reflexion und Transmission R_H/T_H .
c, d) Intensitäten R_V und T_V bei Eingangspolarisation $|V\rangle$.

Strahl, und beide parallel zur Horizontalen verlaufen. Sie legt dadurch die Rotation um die Y-Achse fest. Wir müssen darum nur die Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{Reflexion}{Transmission}$ vom letzten Freiheitsgrad, nämlich der Rotation um die Z-Achse, für beide Eingangsmoden und Polarisierungen untersuchen (Abbildung 2.15).

Für die Eingangspolarisation $|H\rangle$ bleiben die Intensitäten, wie wir aus Abbildung 2.15 a erkennen können, in Transmission und Reflexion konstant. Berechnen wir daraus das Verhältnis von Reflexion und Transmission $\frac{R_H}{T_H}$ (Abbildung 2.15 b), so erhalten wir für Eingangsmode **b** $\left(\frac{R_H}{T_H}\right)_b = 0,0143 \pm 0,0008$ und für Mode **c** $\left(\frac{R_H}{T_H}\right)_c = 0,0141 \pm 0,0006$, was einem rotationsunabhängigen Transmissionsanteil von $\approx 98,6\%$ entspricht.

Im Unterschied dazu finden wir für die Eingangspolarisation $|V\rangle$ ein stark vom Winkel abhängiges Reflexions- und Transmissions-Verhalten (Abbildung 2.15 c, d). Das daraus berechnete Verhältnis $\frac{R_V}{T_V}$ (Abbildung 2.16)

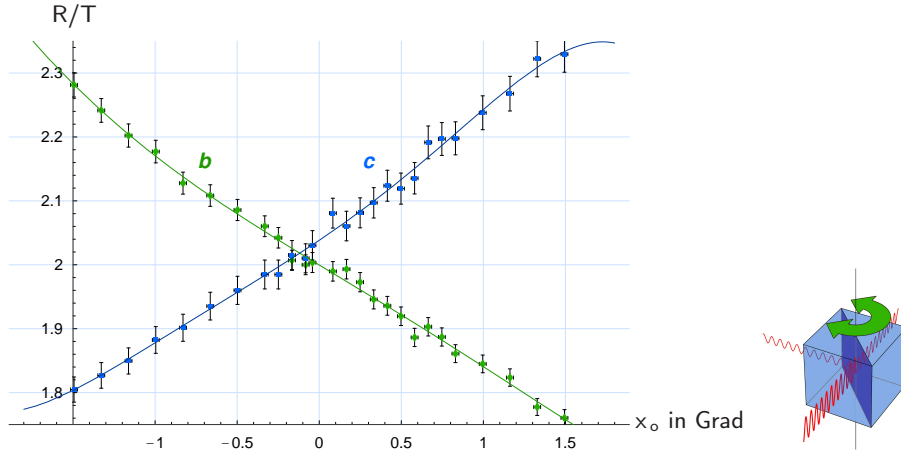
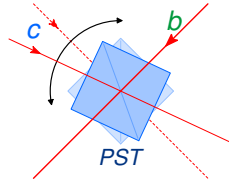


Abbildung 2.16: Verhältnis von Reflexion und Transmission R_V/T_V des \mathcal{PST} für Eingangsmode **b** und Eingangsmode **c** mit Eingangspolarisation $|V\rangle$ in Abhängigkeit von der Drehung um die vertikale Z-Achse.

ergibt an der Stelle $x_o = -0.12^\circ$ für Mode **b** $\left(\frac{R_V}{T_V}\right)_b = (2.018 \pm 0.004)$ mit einer Steigung von -0.078 pro Grad und für Mode **c** $\left(\frac{R_V}{T_V}\right)_c = (2.018 \pm 0.003)$ mit einer Steigung von $+0.083$ pro Grad.



Da die Richtung der Eingangsmode **c** durch die Stellung des Strahlteilers \mathcal{PST} und die Eingangsmode **b** eindeutig festgelegt ist, können die Verhältnisse $\left(\frac{R_V}{T_V}\right)_{b/c}$ nicht unabhängig voneinander für beide Moden eingestellt werden. Wir wählen deshalb die Position $x_o = -0.12^\circ$ für das weitere Experiment, da wir so die Symmetrie des Systems gewährleisten können, auch wenn $R_V/T_V \approx 2$ nicht ganz mit dem Idealwert übereinstimmt.

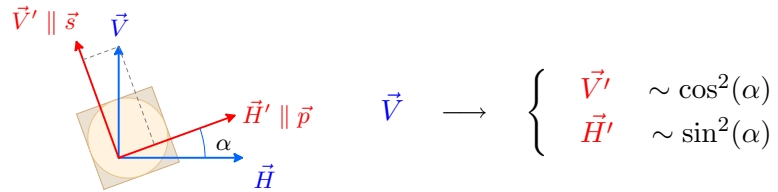
2.2.2.2 Die Strahlteiler-Plättchen

Da es bei den Strahlteiler-Plättchen keine Seitenflächen gibt, über deren Reflexion sich \vec{s} und \vec{p} (Abbildung 2.17) justieren lassen, müssen wir einen indirekten Weg zur symmetrischen Ausrichtung des Strahlteilers finden.

$$\text{Symmetrie} \iff \vec{p} \parallel \vec{H}$$

Dazu können wir die winkelabhängigen Transmissions- bzw. Reflexions-Eigenschaften benutzen. Wir wissen, dass \vec{s} und \vec{p} die Richtung der Ausgangspolarisationen \vec{V}' und \vec{H}' festlegen. Also wird eine Verdrehung von

\vec{p} gegenüber der Eingangspolarisationsrichtung \vec{H} um einen Winkel α nicht nur zu einer Drehung der Ausgangspolarisationen um α führen, sondern auch einen, zu $\sin^2(\alpha)$ proportionalen Anteil an „orthogonaler“ Polarisation \vec{V}' erzeugen.



Durch Drehen um die Z- und die Y-Achse suchen wir den minimalen Anteil an „orthogonaler“ Polarisation, die durch das Strahlteiler-Plättchen aus $|H\rangle$ und $|V\rangle$ erzeugt wird (Abbildung 2.18). Dadurch können wir die Lage der Strahlteiler-Plättchen so einstellen, dass sie die Bedingung $\vec{p} \parallel \vec{V}$ erfüllen. Ein Anteil an orthogonaler Polarisation von unter 0,05% ist dabei erreichbar.

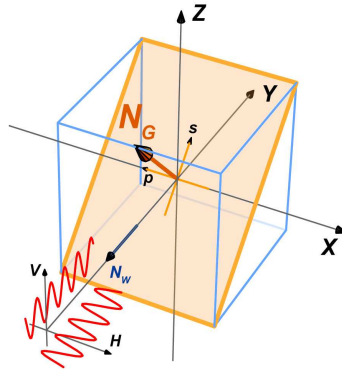


Abbildung 2.17: Koordinatensystem für die Justage des Strahlteiler-Plättchens $\mathcal{PSTP}_{1/2}$.

Haben wir die optimale Position erreicht, so betrachten wir die Transmissionsanteile für $|H\rangle$ - und $|V\rangle$ -polarisiertes Licht unter dem letzten Freiheitsgrad, der Verkippung um die Y-Achse. Die Reflexion können wir außer Acht lassen, da wir nur an der polarisationsabhängigen Abschwächung in Transmission interessiert sind (Kapitel 2.2) und wir den reflektierten Anteil nicht berücksichtigen.

Ebenso wie der Strahlteiler-Würfel, zeigt auch das Strahlteiler-Plättchen ein winkelabhängiges Transmissions-Verhältnis T_H^P/T_V^P (Abbildung 2.19). An der optimalen Position bei $y_0 = 0,8^\circ$ finden wir ein Verhältnis von $T_H^P/T_V^P = 0,333 \pm 0,005$ mit einer Steigung von 0,061 pro Grad.

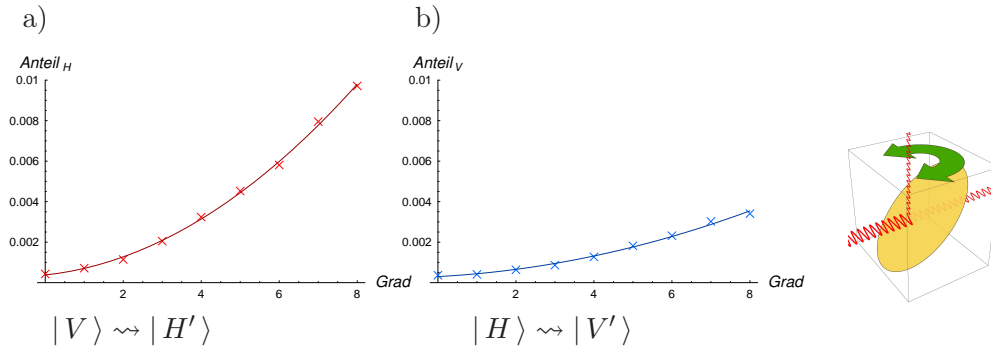


Abbildung 2.18: Justage der Strahlteiler-Plättchen $\mathcal{PSTP}_{1/2}$: a) Abhängig von der Drehung um die Z-Achse detektieren wir trotz präparierter Eingangspolarisation $|V\rangle$ einen Anteil $|H'\rangle$ in Transmission. b) Auch für präpariertes $|H\rangle$ ist ein, wenn auch kleinerer Anteil $|V'\rangle$ in Transmission messbar.

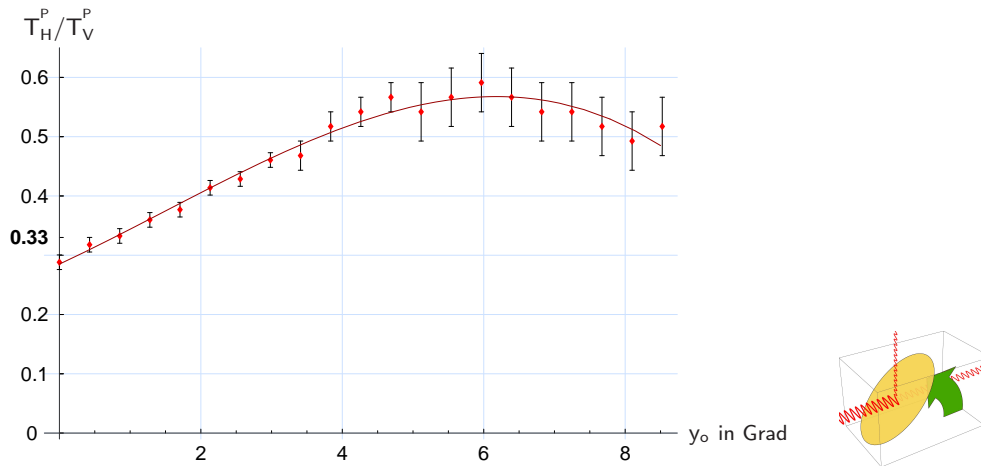


Abbildung 2.19: Verhältnis T_H^P/T_V^P der Strahlteiler-Plättchen $\mathcal{PSTP}_{1/2}$ in Abhängigkeit von der Verkippung um die Y-Achse.

Durch die Charakterisierung der Komponenten des Phasengatters sind wir jetzt in der Lage den Aufbau und die Justage des Phasengatters durchzuführen.

2.2.3 Aufbau und Justage des Phasengatters

In diesem Kapitel werden wir uns mit dem schrittweisen Aufbau und der Justage des Phasengatters beschäftigen. Wir wollen diese, ihrer zeitlichen Abfolge entsprechend, in vier Abschnitte gliedern.

Erster Abschnitt: Justage des Faserkopplers \mathbf{Z}

Für die korrekte Phasengatter-Transformation benötigen wir Interferenz zwischen den Photonen in den beiden Eingangsmoden \mathbf{b} und \mathbf{c} des Überlappstrahlteilers \mathcal{PST} . Um dies zu ermöglichen, müssen die Photonen innerhalb ihrer Kohärenzzeit Δt gleichzeitig am \mathcal{PST} eintreffen. Damit wir Gleichzeitigkeit einstellen können, gestalten wir die Weglänge, die eines der beiden Photonen zurücklegt, variabel.

Dies erreichen wir, indem wir, als erste Komponente, einen Verschiebetisch platzieren, auf dem wir den Faserkoppler \mathbf{Z} montieren (Abbildung 2.20). Wichtig ist dabei, dass sich der Strahlverlauf beim Verschieben des Tisches nicht ändert, da die Qualität der Interferenz am Überlappstrahlteiler stabil bleiben soll. Die Richtung von Koppler \mathbf{Z} muss also parallel zur Bewegungsrichtung des Tisches sein.

Zu diesem Zweck stellen wir einen weiteren Faserkoppler \mathbf{k} mit einer *Multimoden*-Glasfaser in ca. 55cm Entfernung auf und koppeln einen von \mathbf{Z} ausgesandten Justagestrahl in \mathbf{k} ein. Ändert sich die in die *Multimoden*-Glasfaser eingekoppelte Intensität nicht, während wir den Verschiebetisch bewegen, so können wir von guter Parallelität ausgehen. Andernfalls muss die Richtung von \mathbf{Z} nachgestellt und der Vorgang wiederholt werden. Zur Feinjustage wiederholen wir diese Prozedur auch für eine *Monomoden*-Faser, in die nur Licht aus einem sehr schmalen Winkelbereich eingekoppelt werden kann, wodurch wir die Richtung von \mathbf{Z} besonders exakt einstellen können. Wie aus Abbildung 2.21 erkennbar ist, ist es möglich, die Kopplung in die *Monomoden*-Glasfaser über eine Fahrstrecke von mehreren Millimetern stabil zu halten. Den Verschiebetisch können wir dadurch über kleinere Wegstrecken $\approx 1\text{mm}$ bewegen, wie wir sie im fertigen Phasengatter benötigen, ohne dabei die Qualität der Interferenz am \mathcal{PST} zu verlieren.

Zweiter Abschnitt: Justage des Überlappstrahlteilers

In einem zweiten Schritt wird der in Kapitel 2.2.2.1 spezifizierte Überlappstrahlteiler \mathcal{PST} (Abbildung 2.22) platziert. Zuerst beseitigen wir Verkippungen um die horizontalen Achsen X und Y (Abbildung 2.14), die eine korrekte Funktionsweise des Strahlteilers beeinträchtigen würden. Für die X-Achse erreichen wir dies, indem wir den an der Vorderfläche des Strahlteiler-Würfels reflektierten Justagestrahl zur Deckung mit dem einfallenden Strahl bringen. Achten wir zusätzlich auf Parallelität des im Strahlteiler reflektierten Strahls zur Horizontalen, so beseitigen wir dadurch die Verkippung um die Y-Achse. Der Strahlteiler ist nun symmetrisch zum einfallenden Strahl eingestellt, so dass wir mit der Einstellung der von uns gewünschten Parameter für Reflexion und Transmission beginnen können.

Da das Verhältnis T_V/T_H der Transmissionen für vertikale und horizontale Polarisation abhängig von einer Drehung um die vertikale Z-Achse ist, wie wir es in Abschnitt 2.2.2.1 analysiert haben, können wir eine Position

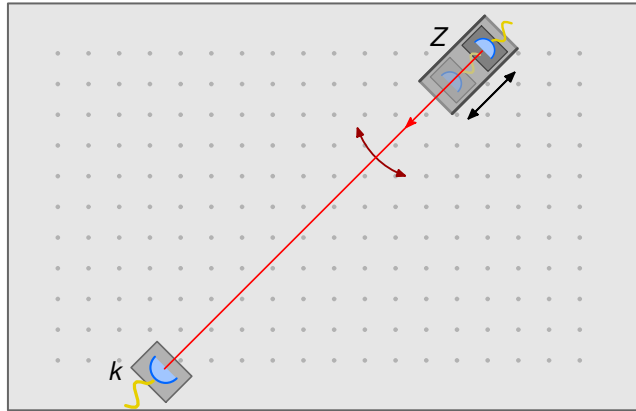


Abbildung 2.20: Parallele Ausrichtung des Faserkopplers **Z** zur Bewegungsrichtung des Verschiebetisches mit Hilfe eines zweiten Faserkopplers **k**.

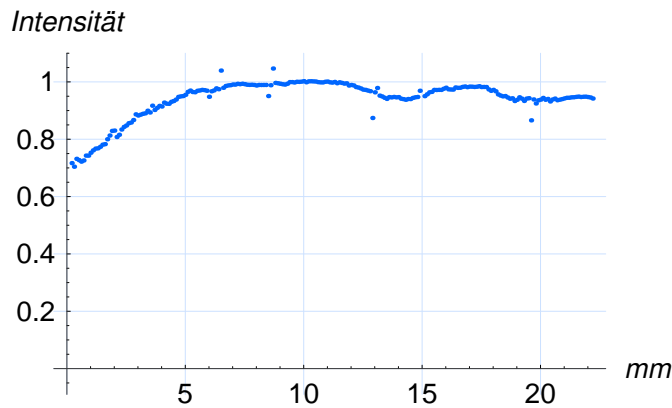


Abbildung 2.21: Kopplungsstärke von Faserkoppler **Z** nach **k** über den gesamten Fahrbereich (0-23mm) des Verschiebetisches.

finden, für die $T_V/T_H \simeq \frac{1}{3}$ gilt. Haben wir diese Position erreicht, so ist dadurch die Position und Richtung des zweiten Faserkopplers **X** (Abbildung 2.23) festgelegt, da die von ihm ausgesandte und am Strahlteiler reflektierte Mode mit der von **Z** emittierten und an \mathcal{PST} transmittierten Mode identisch sein muss. Der Koppler **X** wird auf zwei Verschiebetischen senkrecht zum Strahlengang montiert, um später seine Position und durch eine bewegliche Linse vor der Faser auch seine Richtung justieren zu können, ohne den Faserkoppler **Z** und dessen Justage dabei verändern zu müssen.

Halten wir die Positionen der Koppler **Z** und **X** fest, so können wir durch eine minimale Rotation des Überlappstrahlteilers \mathcal{PST} um die vertikale Ach-

2.2 Aufbau und Justage des Phasengatters Erzeugung des Cluster-Zustands

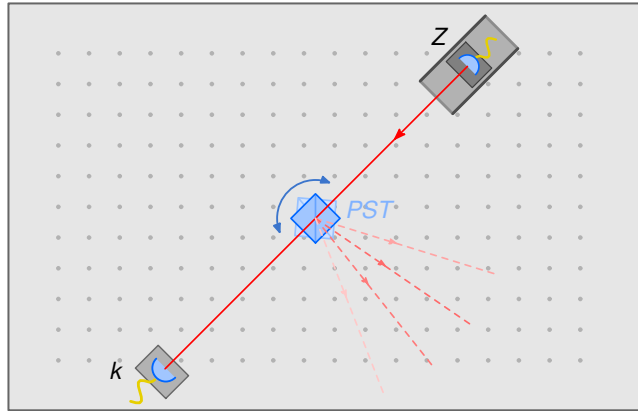


Abbildung 2.22: Einstellen des Überlappstrahlteilers \mathcal{PST} auf ein T_V/T_H -Verhältnis von $\frac{1}{3}$ durch Rotation um die vertikale Achse.

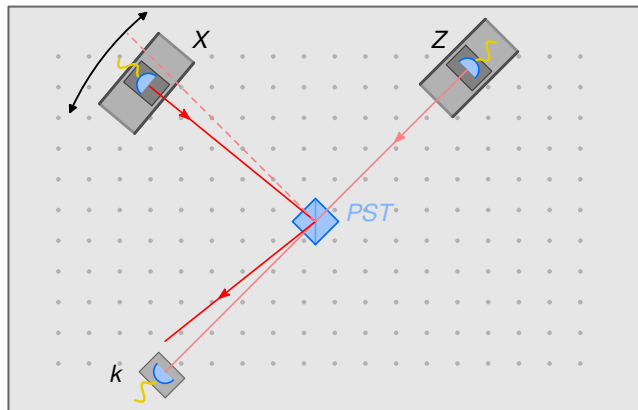


Abbildung 2.23: Platzierung von Koppler \mathbf{X} , der durch die Position des Überlappstrahlteilers festgelegt ist.

se (Abbildung 2.16) die $\frac{R_V}{T_V}$ -Verhältnisse für beide Moden \mathbf{b} und \mathbf{c} angleichen, damit die Gatter-Transformation symmetrisch wird. Da der Strahlteiler \mathcal{PST} jetzt in seiner endgültigen Position ist, können wir nun den Koppler \mathbf{X} exakt justieren (Abbildung 2.25). Es ist wichtig, dass diese Justage sehr präzise ist, da die Qualität der Interferenz am \mathcal{PST} davon abhängt. Wir erreichen dies durch die Aufteilung eines Justagelasers mit einem Faserstrahlteiler in zwei kohärente Strahlen, die über die Koppler \mathbf{Z} und \mathbf{X} zur Interferenz gebracht werden. Auf einem Schirm hinter dem \mathcal{PST} können wir ein Interferenzmuster beobachten, wobei uns die Interferenzstreifen Aufschluss geben über Stärke und Richtung einer Abweichung von der gleichen räumlichen Mode (Abbil-

dung 2.24). Auch eine falsche Einstellung des Fokus für einen der beiden Strahlen ist durch konzentrische Ringe beobachtbar. Position und Richtung von Koppler **X** werden nachgestellt, bis anstatt der Interferenzstreifen nur noch ein Punkt mit schwankender Intensität zu sehen ist.

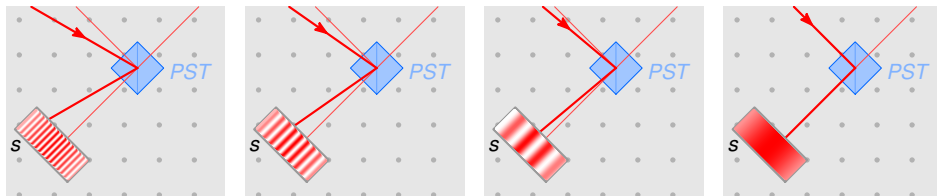


Abbildung 2.24: Interferenzmuster für unterschiedliche Abweichungen in der Strahlrichtung.

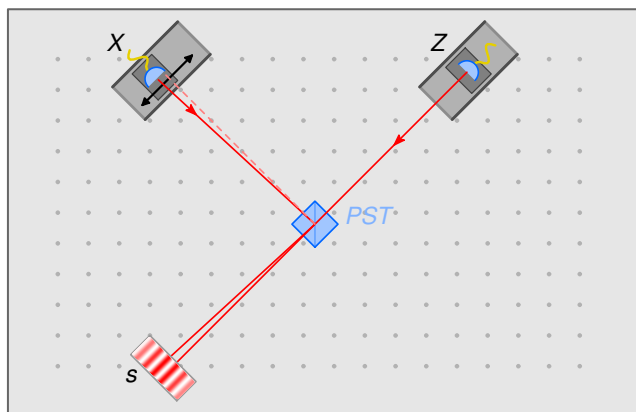


Abbildung 2.25: Feinjustage von Koppler **X** durch Beobachtung eines Interferenzmusters.

Dritter Abschnitt: Justage der Strahlteiler-Plättchen

Wie wir es schon bei der Charakterisierung der Strahlteiler-Plättchen in Kapitel 2.2.2.2 beschrieben haben, müssen wir das Plättchen zuerst symmetrisch zur Richtung des einfallenden Strahls positionieren (Abbildung 2.26). Wir finden diese Position, da sie sich durch einen minimalen Anteil der Ausgangspolarisation $|V'\rangle$ bei einer Eingangspolarisation von $|H\rangle$ auszeichnet.

Anschließend können wir durch Verkipfung um die horizontale Y-Achse das Verhältnis der Transmissionsanteile von $|H\rangle$ und $|V\rangle$ ändern, wobei der Idealwert bei $T_H^P/T_V^P = \frac{1}{3}$ liegt (vgl. Kapitel 2.2). Um aber mögliche Fehler

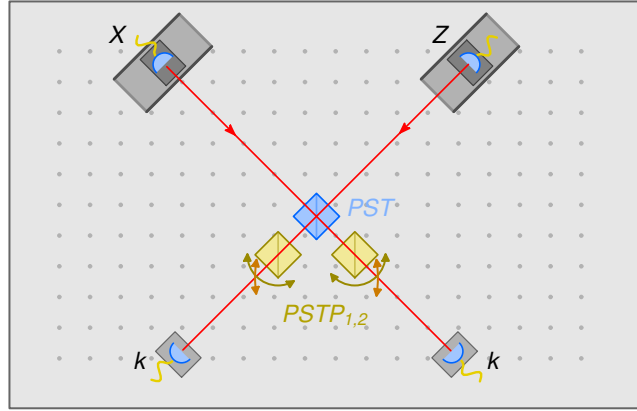


Abbildung 2.26: Justage der Strahlteiler-Plättchen $\mathcal{PST}\mathcal{P}_{1/2}$ durch Drehung um die horizontale und vertikale Achse.

im Aufteilungsverhältnis des Überlappstrahlteilers \mathcal{PST} , zumindest teilweise, kompensieren zu können, betrachten wir den \mathcal{PST} und das Strahlteiler-Plättchen als Einheit. Beide zusammen sollten $|V\rangle$ in gleichem Maße wie $|H\rangle$ transmittieren. Für die Justage können wir das nutzen, indem wir als Eingangspolarisation $|+\rangle$ wählen und das Strahlteiler-Plättchen um die Y-Achse verkippen, bis wir ebenfalls als Ausgangspolarisation $|+\rangle$ erhalten.

Um zu zeigen, dass wir mit dieser angepassten Methode Ergebnisse erzielen, die zumindest genauso gut sind wie diejenigen einer unabhängigen Justage auf $T_H^P/T_V^P = \frac{1}{3}$, betrachten wir die *Prozess-Fidelity* F_P in Abhängigkeit von der Transmission T_V vertikaler Polarisation des \mathcal{PST} in zwei verschiedenen Fällen (Abbildung 2.27): Im ersten Fall wird die Transmission der Strahlteiler-Plättchen konstant bei $T_H^P/T_V^P = \frac{1}{3}$ beibehalten, während im zweiten Fall, wie eben beschrieben, die Abschwächung angepasst wird, so dass die Eingangspolarisation durch das Gesamtsystems erhalten bleibt.

Das Ergebnis zeigt, dass die angepasste Methode in einem weiten Parameterbereich von Vorteil ist. Besonders für zu kleines T_V zeigt diese Methode wesentlich höhere *Prozess-Fidelities* als die Methode mit konstanter Abschwächung.

Benutzen wir die gemessenen Parameter für den Überlappstrahlteiler \mathcal{PST} ($\frac{R_V}{T_V} = (2,018 \pm 0,003)$ mit $0,02^\circ$ Winkelungenauigkeit) und die Strahlteiler-Plättchen ($T_H^P/T_V^P = 0.335 \pm 0.006$), so können wir eine Abschätzung der *Prozess-Fidelity* vornehmen, aus der wir $F_P \geq 99.973\%$ erhalten. Wir können also davon ausgehen, dass das Aufteilungsverhältnis und die Abschwächung optimal justiert sind.

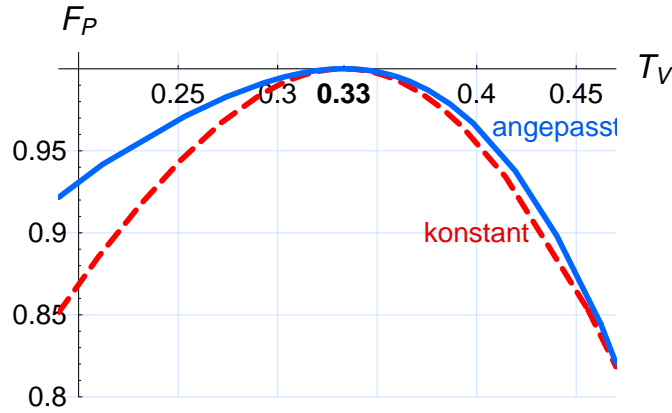


Abbildung 2.27: Die *Prozess-Fidelity* F_P in Abhängigkeit von T_V des \mathcal{PST} für ein **konstantes** Verhältnis $T_H^P/T_V^P = \frac{1}{3}$ des Strahlteiler-Plättchens und für eine **angepasste** Transmission, bei der T_H^P auf Erhaltung der Eingangspolarisation des Gesamtsystems aus \mathcal{PST} und Strahlteiler-Plättchen $\mathcal{PSTP}_{1/2}$ justiert wird.

Vierter Abschnitt: Verbesserung der Interferenz am Strahlteiler

Der weitaus empfindlichste Teil des Phasengatters ist die Interferenz am Überlappstrahlteiler. Es ist deswegen nicht nur beim Aufbau des Phasengatters, sondern in regelmäßigem Abstand erforderlich die Position und Richtung des Faserkopplers \mathbf{X} nachzustellen. Bisher haben wir diese Justage, wie in Abschnitt zwei beschrieben, durch Beobachtung von Interferenzmustern hinter dem Strahlteiler \mathcal{PST} durchgeführt. Um von diesem Punkt aus die Interferenz noch weiter verbessern zu können, verwenden wir die $|VV\rangle$ -Koinzidenzzählrate als Anhaltspunkt bei der Positions- und Richtungsjustage. Sie wird mit zunehmender Qualität der Interferenz kleiner und gibt uns direkten Aufschluss über die Ununterscheidbarkeit der Photonen hinter dem Strahlteiler \mathcal{PST} (vgl. Kapitel 2.2.1).

Das Problem dabei ist, dass wir für das Experiment Photonen aus zwei unabhängigen Quellen verwenden, weshalb sich nur zufällig Koinzidenzen ergeben. Die Koinzidenzzählrate ist also zu niedrig, um eine Justage durchzuführen.

Um dieses Problem zu lösen, ohne dabei viele Veränderungen am Versuchsaufbau vornehmen zu müssen, bringen wir, gemäß Abbildung 2.28, einen weiteren Spiegel (DCS) direkt neben dem UV-Spiegel an. Dieser reflektiert die Photonen, die in Mode **a** emittiert werden, durch den Kristall hindurch in die Mode **c**, wodurch die Photonen in den Moden **b** und **c** nicht mehr von zwei unabhängigen Quellen (Abbildung 2.30), sondern aus der selben Quelle stammen (Abbildung 2.29).

Auf diese Weise können wir nun die Justage von Position und Richtung des Faserkopplers \mathbf{X} durchführen. Um anschließend bewerten zu können,

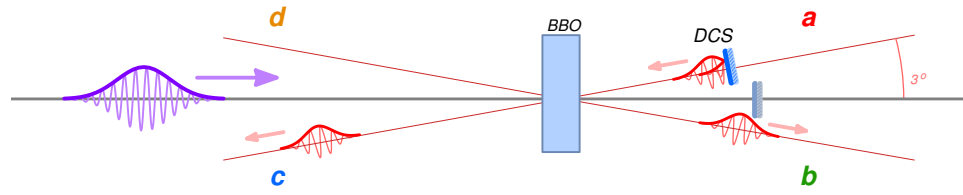


Abbildung 2.28: Reflexion der Photonen aus Mode **a** durch den BBO-Kristall hindurch nach Mode **c**.

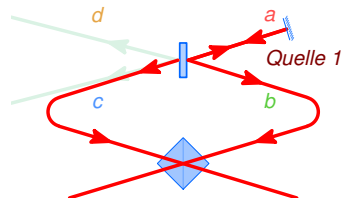


Abbildung 2.29: Für die Justage der Interferenz am \mathcal{PST} wird nur **Quelle 1** verwendet.

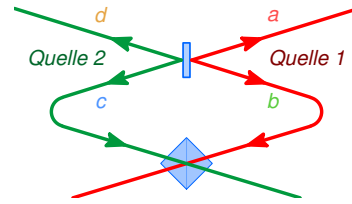


Abbildung 2.30: Zur Erzeugung des *Cluster-Zustands* $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$ werden **Quelle 1** und **Quelle 2** benötigt.

wie gut die Qualität der Interferenz ist, verändern wir die Weglänge für das Photon in Mode **b** mit dem Verschiebetisch, wodurch die beiden Photonen, aufgrund ihrer Ankunftszeiten am Strahlteiler, mehr oder weniger unterscheidbar sind. Betrachten wir dabei die $|VV\rangle$ -Koinzidenzen, so lässt sich für die Position des Verschiebetisches x_0 , an der die Photonen am wenigsten unterscheidbar sind, ein Einbruch in der Zählrate feststellen. Dieser Effekt wird auch als „Hong-Ou-Mandel-Dip“ (HOM-Dip) bezeichnet [36].

2.2.4 Eigenschaften des Hong-Ou-Mandel-Dips im Phasengatter

Tragen wir die Zählrate N der $|VV\rangle$ -Koinzidenzen gegenüber der Position x des Verschiebetisches auf, wie wir es in Abbildung 2.31 schematisch durchgeführt haben, so erhalten wir die Dip-Funktion, die beschrieben wird durch:

$$N = \text{const.} \times \left(1 - V e^{-\left(\frac{x-x_0}{L}\right)^2}\right) \quad (2.8)$$

V ist dabei die *Visibility*, die die Tiefe des Dips angibt, x_0 die Position, an der sich die Wellenpakete beider Photonen maximal überlappen, und L die charakteristische Breite, die mit der Kohärenzlänge der Photonen zusammenhängt.

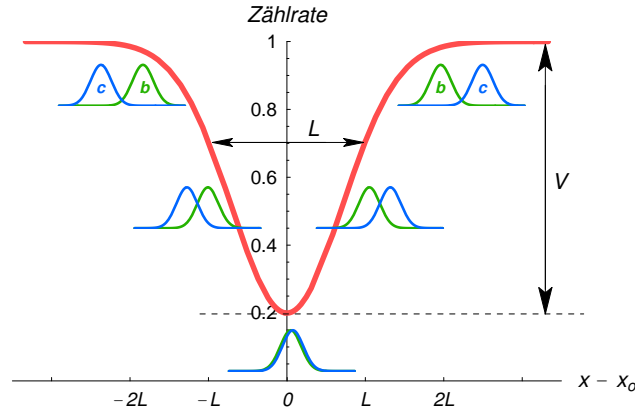


Abbildung 2.31: Schematischer Verlauf der $|VV\rangle$ -Koinzidenzen als Funktion der Verschiebetisch-Position x relativ zur Position gleicher Weglängen x_o . Die Tiefe des Dips wird dabei als *Visibility* V , die Breite mit L bezeichnet.

Präparieren wir zum Beispiel $|VV\rangle$ als Eingangszustand in das Phasengatter und betrachten die $|VV\rangle$ -Koinzidenzen, so bekommen wir im Dip genau ein Neuntel der Eingangszählrate (Gleichung (2.5)), falls es keine anderen Einflüsse außer der Verschiebetisch-Position gibt, die die Interferenz beeinträchtigen:

$$|VV\rangle\langle VV| \xrightarrow{\hat{P}G^*} \frac{1}{9} |VV\rangle\langle VV|$$

Außerhalb des Dips, also für vollständig unterscheidbare Photonen, erwarten wir nach Kapitel 2.2.1 genau $\frac{5}{9}|VV\rangle\langle VV|$ der Eingangszählrate:

$$P(|VV\rangle\langle VV|) = T_V \cdot T_V + R_V \cdot R_V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$$

Die *Visibility* des $|VV\rangle$ -Dips, die wir auf folgende Weise berechnen können, beträgt also maximal 80% für ein perfektes Phasengatter.

$$V = 1 - \frac{\min}{\max} = 1 - \frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{5}$$

Der HOM-Dip ist jedoch nicht auf die $|VV\rangle$ -Koinzidenzen beschränkt. In der Tat gibt es, abhängig vom Eingangszustand $|\phi\rangle$, eine Vielzahl an möglichen Koinzidenz-Ereignissen, bei denen wir einen Dip beobachten können. Interessanterweise unterscheiden sich einige Dips stark, sowohl in den Zählraten außerhalb des Dips als auch in der maximal erreichbaren Tiefe (Tabelle 2.3).

Wählen wir zum Beispiel $|++\rangle$ als Eingangszustand, so erwarten wir im Idealfall keine $|V+\rangle$ -Koinzidenzen im Dip:

$$\begin{aligned}\hat{P}G |++\rangle &= \hat{P}G \frac{1}{2} (|HH\rangle + |HV\rangle + |VH\rangle + |VV\rangle) = \\ &= \frac{1}{6} (|HH\rangle + |HV\rangle + |VH\rangle - |VV\rangle) = \frac{\sqrt{2}}{6} (|H+\rangle + |V-\rangle)\end{aligned}$$

Außerhalb des Dips erhalten wir aber $\frac{1}{9}$ der Eingangszählrate. Die maximale *Visibility* beträgt hier also $V_{max} = 1$.

Eingang	Analyse	$V_{max.}$	$N_{au\beta erhalb}$
$ \phi^+\rangle$	$ VV\rangle$	0,8	0,278
	$ +V\rangle$	0,8	0,139
	$ ++\rangle$	1	0,111
	$ R-\rangle$	0,67	0,083
	\vdots	\vdots	\vdots
zufällige Kombinationen aus $ H\rangle$ und $ V\rangle$	$ VV\rangle$	0,8	0,139
	$ +V\rangle$	0,67	0,083
	$ ++\rangle$.5	0,056
	$ R-\rangle$	0,5	0,056
	\vdots	\vdots	\vdots
$ V\rangle \otimes R\rangle$	$ V+\rangle$	0,67	0,167
	$ VR\rangle$	1	0,222
	\vdots	\vdots	\vdots
$ +\rangle \otimes R\rangle$	$ VV\rangle$	0,8	0,139
	$ +R\rangle$	0,8	0,139
	$ L-\rangle$	1	0,056
	\vdots	\vdots	\vdots

Tabelle 2.3: Auswahl verschiedener HOM-Dips mit maximaler *Visibility* V_{max} und auf die Eingangszählrate normierter Koinzidenzzählrate $N_{au\beta erhalb}$ außerhalb des Dips.

Bisher sind wir bei den genannten Beispielen und auch in Tabelle 2.3 immer davon ausgegangen, dass sich in jeder Eingangsmode nur ein Photon befindet. Für Photonen aus einer Quelle ist das auch eine sinnvolle Annahme, da wir andere Effekte, die auch zu Koinzidenzen führen, gegenüber der hohen Koinzidenzzählrate durch Photonen-Paare in den Moden **b** und **c** vernachlässigen können.

Anders aber gestaltet sich der Fall, wenn wir, wie zur Erzeugung des $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$, jeweils ein Photon aus zwei unabhängigen Quellen zur Interferenz bringen möchten. Da wir zufällige Koinzidenzen zwischen den Photonen in

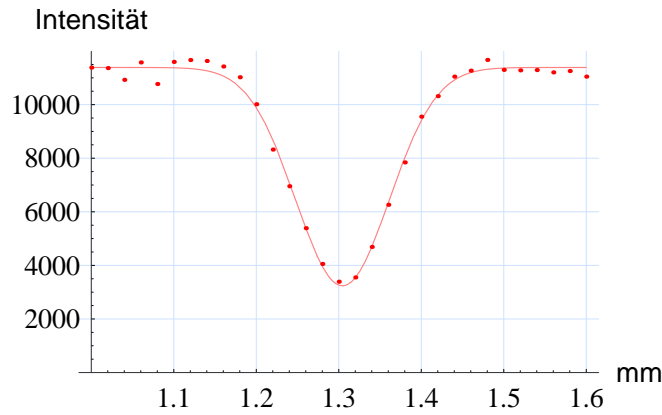


Abbildung 2.32: Experimentell bestimmter $|VV\rangle$ -Dip mit *Visibility* $V = 0,715$. Das entspricht 89,4% des Maximalwertes.

Mode **b** und **c** benötigen, haben wir eine sehr niedrige Koinzidenzzählrate, so dass auch Koinzidenzen ins Gewicht fallen, die zum Beispiel durch zwei Photonen in einer Mode hervorgerufen werden, welche sich erst am Strahlteiler \mathcal{PST} auf die beiden Moden aufspalten. Zwei Photonen, die aus der gleichen Mode kommen, interferieren aber nicht am Strahlteiler \mathcal{PST} , weshalb ihre Koinzidenzzählrate unabhängig vom Dip einen Untergrund bildet (Abbildung 2.33). Für ein Experiment mit unseren Parametern haben die drei Fälle, 1. beide Photonen stammen aus Mode **b** 2. beide Photonen stammen aus Mode **c** und 3. aus den Moden **b** und **c** stammt je ein Photon, ungefähr gleiche Wahrscheinlichkeiten, wodurch die maximale *Visibility* auf $V_{max} \approx 0.307$ absinkt.

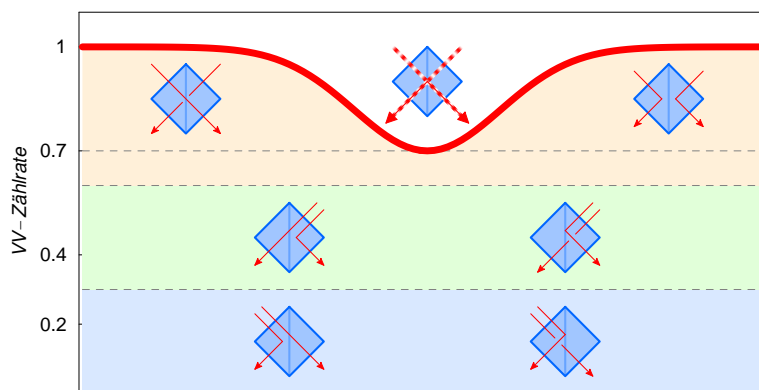


Abbildung 2.33: Schematische Darstellung des Koinzidenz-Untergrundes für $|VV\rangle$ -Koinzidenzen von zwei unabhängigen Quellen. Durch den Untergrund sinkt die maximale *Visibility* auf $\approx 30,7\%$.

Haben wir zum Beispiel einen Dip mit Photonen aus unabhängigen Quellen mit einer *Visibility* von 25,05%, wie das in Abbildung 2.34 der Fall ist, so entspricht das immerhin 81,86% des Maximalwertes.

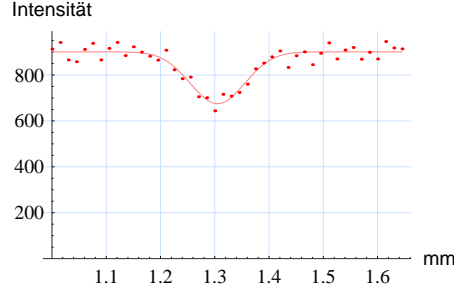


Abbildung 2.34: $|VV\rangle$ -Dip zwischen unabhängigen Quellen mit einer *Visibility* von $V = 0,25 = 0,814V_{max}$.

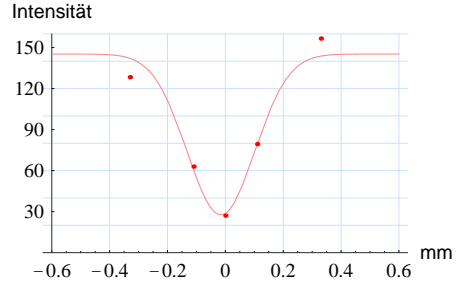


Abbildung 2.35: $|VV--\rangle$ -Dip mit einer *Visibility* von $V = 0,81$.

Betrachten wir nicht nur HOM-Dips in 2-fach-Koinzidenzen, sondern auch in 4-fach-Koinzidenz-Ereignissen, so entsprechen die *Visibilities* wieder denen, die wir bei den 2-fach-Koinzidenzen mit Photonen aus einer Quelle (Abbildung 2.35) vorfinden. Der Grund dafür ist, dass die wahrscheinlichste 4-fach-Koinzidenz, die nicht von der Interferenz beeinflusst wird und bei der drei Photonen aus einer Quelle und ein Photon aus der zweiten Quelle detektiert werden müssen, im Vergleich zu den Koinzidenzzählraten zwischen zwei Paaren aus je einer Quelle vernachlässigbar ist.

2.2.5 Charakterisierung des Phasengatters mit einer Prozesstomographie

Wir wollen in diesem Abschnitt das reale Phasengatter genauer analysieren. Zu diesem Zweck führen wir eine Prozesstomographie durch, die wir schon in Kapitel 1.3.2 eingeführt haben.

2.2.5.1 Ergebnisse der Prozesstomographie

Als erstes benötigen wir eine Menge von Eingangszuständen, die eine Basis für den Raum der 2-Qubit-Zustände bildet. Wir wählen dafür die Zustände:

$$\hat{\rho}_i = \{ |HH\rangle\langle HH|, |HV\rangle\langle HV|, |H+\rangle\langle H+|, |HL\rangle\langle HL|, |VH\rangle\langle VH|, \dots \}$$

Für jeden der 16 Eingangszustände müssen wir eine Zustandstomographie des Ausgangszustands durchführen um die zugehörige Dichtematrix $\hat{\rho}'_i$ bestimmen zu können. Von der Matrix $\hat{\rho}'_i$ ausgehend, suchen wir mit der

maximum-likelihood-Methode diejenige Dichtematrix $\hat{\rho}_i^{[exp]}$, die $\hat{\rho}'_i$ am nächsten ist, aber gleichzeitig physikalisch sinnvoll ist [24]. Mit physikalisch sinnvoll ist in diesem Zusammenhang gemeint, dass sie positiv semidefinit sein muss.

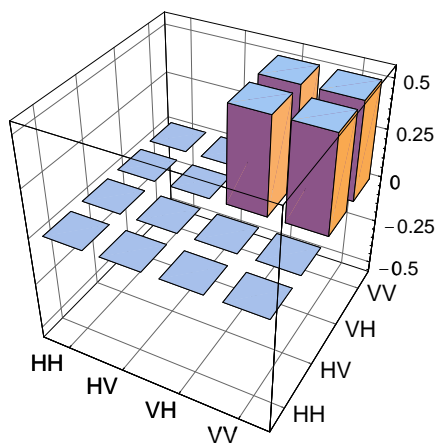


Abbildung 2.36: Dichtematrix $\hat{\rho}$ des Phasengatter-Eingangszustands $|V+\rangle$.

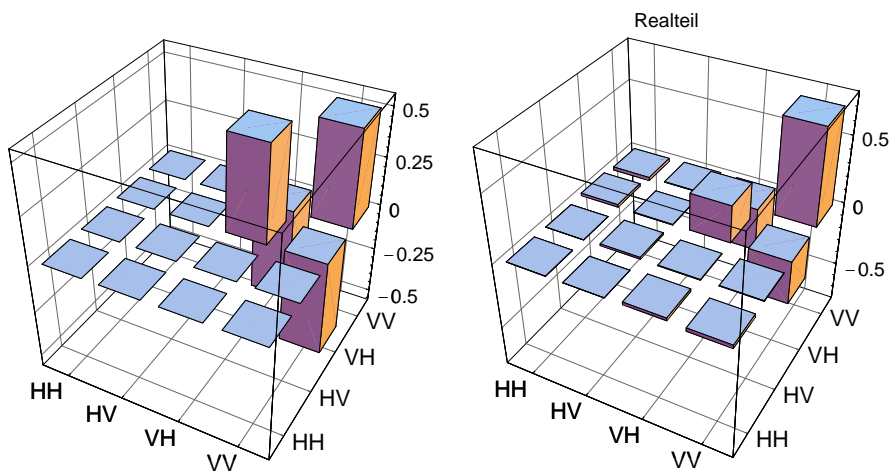


Abbildung 2.37: Dichtematrix $\hat{\rho}^{[ideal]}$ des idealen Phasengatter-Ausgangszustands $|V-\rangle = \hat{P}\hat{G}|V+\rangle$.

Abbildung 2.38: Realteil der experimentell ermittelten Ausgangsdichtematrix $\hat{\rho}^{[exp]}$ für das Phasengatter. Der Imaginärteil kann vernachlässigt werden.

Nehmen wir als Beispiel den Eingangszustand $|V+\rangle\langle V+|$ (Abbildung 2.36), so erhalten wir den in Abbildung 2.38 dargestellten Ausgangszustand. Da wir ein nicht-perfektes Phasengatter haben, weicht der Ausgangszustand $\hat{\rho}^{[exp]}$ vom idealen Zustand $|V-\rangle\langle V-| = \hat{\rho}^{[ideal]}$ ab (Abbildung 2.37). Berechnen wir die *Fidelity* zwischen den Ausgangszuständen $\hat{\rho}^{[ideal]}$ und $\hat{\rho}^{[exp]}$, so erhalten wir $\mathcal{F} = 0,814$. In Tabelle 2.4 sind die *Fidelities* für alle 16 Dichtematrizen angegeben.

Eingangszustand	Fidelity \mathcal{F}
$ HH\rangle$	0,993
$ HV\rangle$	0,962
$ H+\rangle$	0,954
$ HL\rangle$	0,956
$ VH\rangle$	0,934
$ VV\rangle$	0,981
$ V+\rangle$	0,814
$ VL\rangle$	0,815
$ +H\rangle$	0,933
$ +V\rangle$	0,818
$ ++\rangle$	0,799
$ +L\rangle$	0,785
$ LH\rangle$	0,954
$ LV\rangle$	0,856
$ L+\rangle$	0,867
$ LL\rangle$	0,835

Tabelle 2.4: *Fidelities* zwischen den gemessenen und idealen Ausgangszuständen $\hat{\rho}^{[exp]}$ bzw. $\hat{\rho}^{[ideal]}$ des Phasengatters.

Wir benutzen jetzt das in Kapitel 1.3.2 vorgestellte Verfahren, um die Prozesstomographie-Matrix χ_{ml} zu bestimmen, die die komplette Information über die Gatter-Transformation enthält:

$$\hat{Q}(\hat{\rho}) = \sum_{m,l} \chi_{ml} \hat{E}_m \hat{\rho} \hat{E}_l^\dagger \quad \forall \hat{\rho} \quad (2.9)$$

Dabei ist unsere Operator-Basis \hat{E}_i durch alle Kombinationen von $\{\hat{\mathbf{1}}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$ gegeben:

$$\hat{E}_1 = \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}} \quad \hat{E}_2 = \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\sigma}_x \quad \hat{E}_3 = \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\sigma}_y \quad \hat{E}_4 = \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \quad \hat{E}_5 = \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\mathbf{1}} \dots$$

Die Einträge von $\chi_{ml}^{[exp]}$ sind in Abbildung 2.40 dargestellt, wobei wir in Grafiken anstatt $\{\hat{\mathbf{1}}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$ die Schreibweise $\{1, X, Y, Z\}$ für die Operatoren verwenden werden, um die Übersichtlichkeit zu erhalten.

Erzeugung des Cluster-Zustands 2.2 Prozesstomographie des Phasengatters

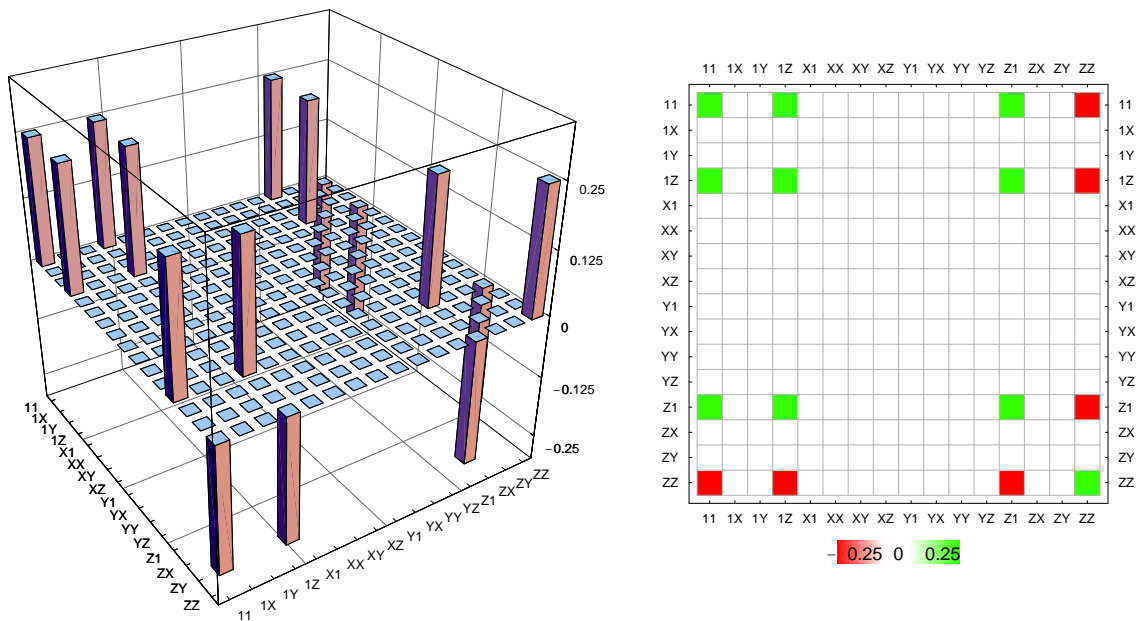


Abbildung 2.39: Prozesstomographie-Matrix $\chi_{ml}^{[ideal]}$ eines perfekten Phasengatters.

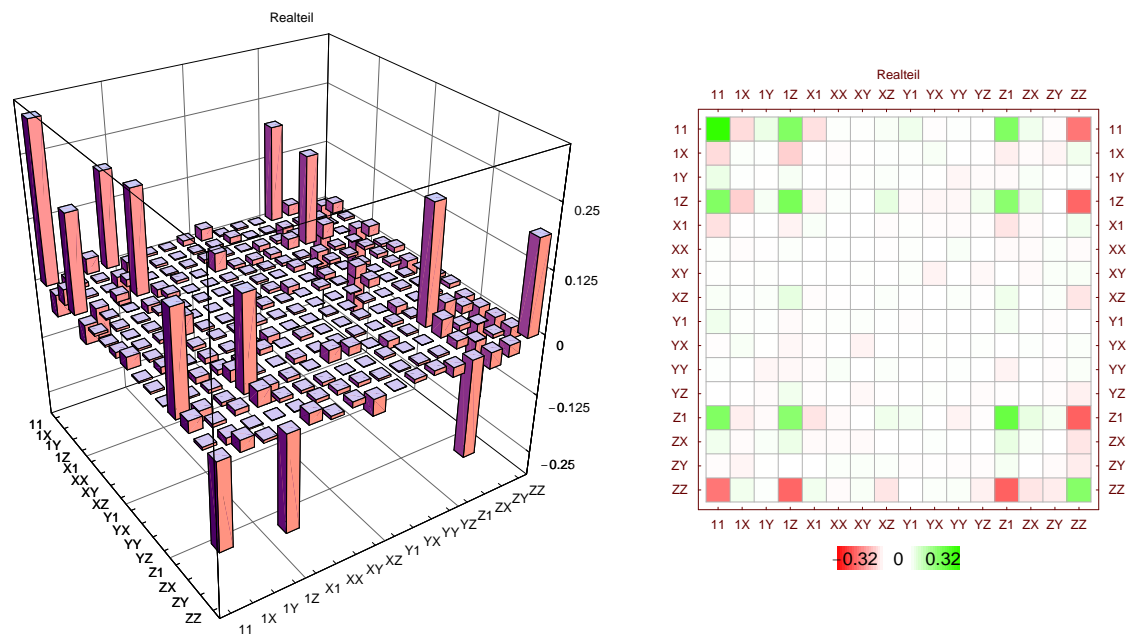


Abbildung 2.40: Realteil der gemessenen Prozesstomographie-Matrix $\chi_{ml}^{[exp]}$. Der Imaginärteil kann vernachlässigt werden.

Vergleichen wir die Matrix $\chi_{ml}^{[exp]}$ mit der eines perfekten Phasengatters $\chi_{ml}^{[ideal]}$ (Abbildung 2.39), so gibt es einige Unterschiede, die wir näher untersuchen wollen. Betrachten wir zum Beispiel den Realteil genauer, so erkennen wir, dass der Eintrag $\chi_{(\hat{\mathbf{i}} \otimes \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}} \otimes \hat{\mathbf{i}})}^{[exp]}$ erhöht ist, die Einträge $\chi_{(\hat{\mathbf{i}} \otimes \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}} \otimes \hat{\sigma}_z)}^{[exp]}$ und $\chi_{(\hat{\mathbf{i}} \otimes \hat{\sigma}_z, \hat{\mathbf{i}} \otimes \hat{\mathbf{i}})}^{[exp]}$ aber zu niedrig sind. Interpretieren können wir die Überhöhung des Eintrags $\chi_{(\hat{\mathbf{i}} \otimes \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}} \otimes \hat{\mathbf{i}})}^{[exp]}$ als erhöhte Wahrscheinlichkeit, dass unser Gatter keine Transformation ausführt. Diese Abweichung von der idealen Phasengatter-Transformation ist hauptsächlich auf eine nicht-perfekte Interferenz am Überlappstrahlteiler \mathcal{PST} zurückzuführen. Dies können wir am besten sehen, indem wir einen Vergleich mit einem theoretischen Modell des Phasengatters anstellen:

Wie in Kapitel 2.2.1 beschrieben, wird die Interferenz am Strahlteiler schlechter, falls die beiden ankommenden Photonen unterscheidbar sind. Dadurch ist es im Falle einer Koinzidenz zwischen den Ausgangsmoden \mathbf{b}' und \mathbf{c}' möglich, zu entscheiden, ob die beiden Photonen reflektiert oder transmittiert wurden. Wir bekommen also keine Superposition dieser beiden Möglichkeiten, sondern eine inkohärente Mischung, die wir als *Rauschen* bezeichnet haben. Dieses *Rauschen* $\hat{R}(\hat{\rho})$ entspricht folgender Transformation:

$$\begin{aligned} \hat{R}(\hat{\rho}) &= \text{Transmission}(\hat{\rho}) + \text{Reflexion}(\hat{\rho}) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \hat{\rho} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \hat{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nehmen wir an, dass wir die ideale Phasengatter-Operation mit einem Anteil von V , der äquivalent zur *Visibility* des HOM-Dips ist, durchführen und mit einem Anteil von $1 - V$ die *Rausch*-Transformation $\hat{R}(\hat{\rho})$ durchführen, so erhalten wir:

$$\hat{Q}_{[V]}(\hat{\rho}) = V \frac{1}{9} \hat{P}G \cdot \hat{\rho} \cdot \hat{P}G + (1 - V) \hat{R}(\hat{\rho}) \quad (2.10)$$

Berechnen wir die Prozesstomographie-Matrix $\chi_{ml}^{[V]}$ dieser Transformation für verschiedene *Visibilities* V , so sehen wir, dass mit abnehmendem V der Eintrag $\chi_{(\hat{\mathbf{i}} \otimes \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}} \otimes \hat{\mathbf{i}})}^{[V]}$ überhöht wird (Abbildung 2.41). Ebenso vermindern sich die beiden Einträge $\chi_{(\hat{\mathbf{i}} \otimes \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}} \otimes \hat{\sigma}_z)}^{[V]}$ und $\chi_{(\hat{\mathbf{i}} \otimes \hat{\sigma}_z, \hat{\mathbf{i}} \otimes \hat{\mathbf{i}})}^{[V]}$, wie wir es auch bei der experimentell bestimmten Matrix $\chi_{ml}^{[exp]}$ festgestellt haben.

Bilden wir die Differenz der beiden Matrizen $\Delta\chi_{ml} = \chi_{ml}^{[exp]} - \chi_{ml}^{[V]}$ und berechnen deren Skalarprodukt $Sp(\Delta\chi_{ml} \cdot \Delta\chi_{ml})$, das von der *Visibility* V abhängt, so finden wir ein Minimum für $V \simeq 0,9$ (Abbildung 2.44). Wir nehmen an, dass unsere Modell-Matrix $\chi_{ml}^{[V=0,9]}$ die experimentelle Matrix

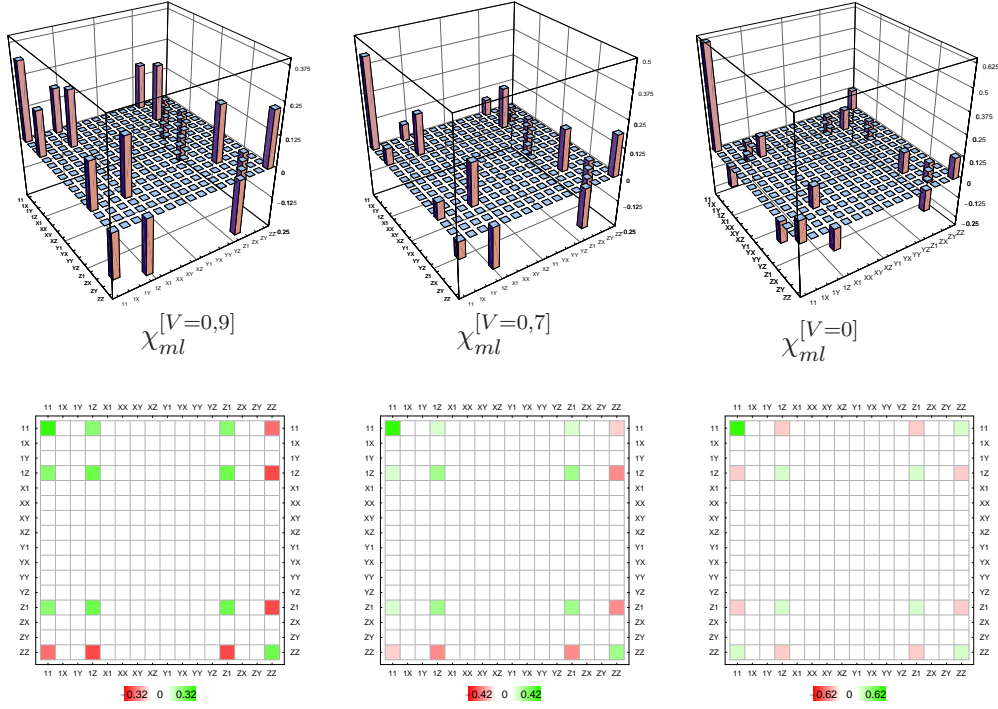


Abbildung 2.41: Prozesstomographie-Matrizen $\chi_{ml}^{[V]}$ für ein theoretisches Modell des nicht-perfekten Phasengatters mit Transformation $\hat{Q}_{[V]}(\hat{\rho})$ und verschiedenen HOM-Dip *Visibilities* V .

$\chi_{ml}^{[exp]}$ für diesen Wert am besten beschreibt, was auch konsistent zur Dip *Visibility* aus Abbildung 2.32 in Kapitel 2.4 ist. Wenn wir die Differenz $\Delta\chi_{ml}$ für $V = 0,9$ betrachten (Abbildung 2.43), so sehen wir, dass alle führenden Einträge durch unser Modell gut beschrieben werden. Die Annahme, dass die experimentelle Gatter-Transformation hauptsächlich durch eine nicht-perfekte Interferenz beeinträchtigt wird, bestätigt sich dadurch. In Abbildung 2.42 sind die Charakteristika verschiedener anderer Einflüsse dargestellt, die sich aber alle von $\Delta\chi_{ml}$ unterscheiden, so dass sie nur zu einem vernachlässigbaren Anteil eine Rolle für die Transformation spielen.

Um die Qualität unseres Phasengatters auch über die *Prozess-Fidelity* zu bestimmen, führen wir eine Basis-Transformation durch. Dazu betrachten wir den Unterraum, der in der bisherigen Operator-Basis durch

$$\hat{E}_j = \{\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbf{1}}, \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z\}$$

beschrieben wurde, und spannen ihn mit der folgenden neuen Basis auf:

2.2 Prozesstomographie des Phasengatters Erzeugung des Cluster-Zustands

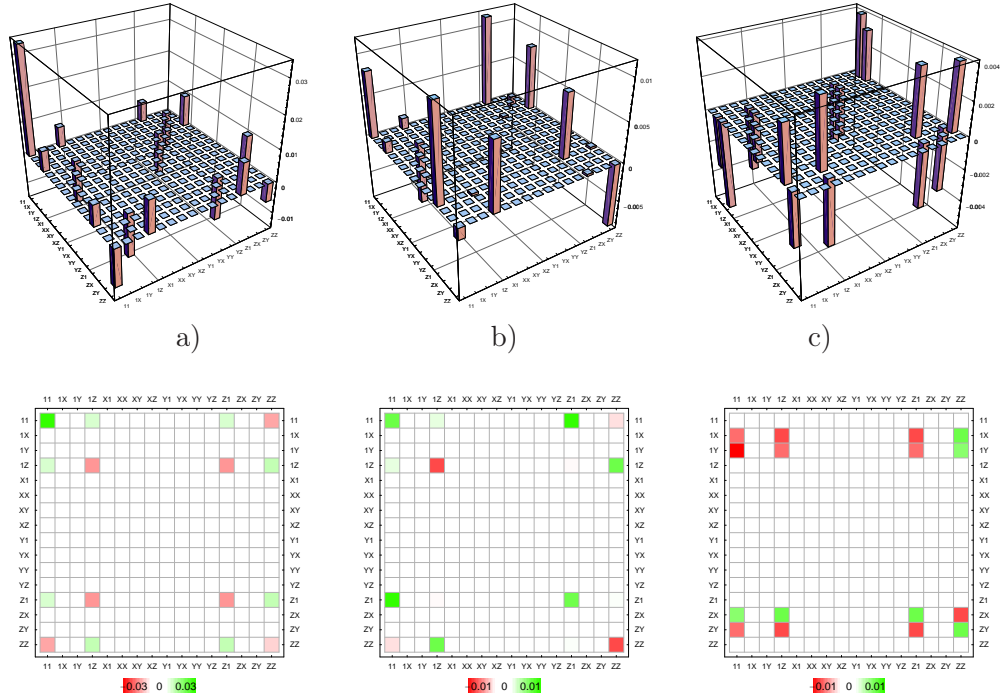


Abbildung 2.42: Charakteristische Unterschiede der Prozesstomographie-Matrizen für verschiedene Störfaktoren auf das Phasengatter-Modell:

a) Abweichung $(\chi_{ml}^{[V=0,9]} - \chi_{ml}^{[V=0,9 / \frac{T_V}{T_H} = \frac{1}{3} \cdot 1,02]})$ für ein Transmissionsverhältnis $T_V/T_H = \frac{1}{3} \cdot 1,02$ des \mathcal{PST} .

b) Abweichung $(\chi_{ml}^{[V=0,9]} - \chi_{ml}^{[V=0,9 / \frac{T_H}{T_V} = \frac{1}{3} \cdot 1,04]})$ für ein Transmissionsverhältnis $T_H/T_V = \frac{1}{3} \cdot 1,04$ des Strahlteiler-Plättchens \mathcal{PSTP}_1 .

c) Abweichung $(\chi_{ml}^{[V=0,9]} - \chi_{ml}^{[V=0,9/2^\circ]})$ für eine um 2° verdrehte Polarisationsanalyse in Mode **b**.

$$\hat{E}_j^{(\hat{P}G)} = \{ \hat{P}G, \hat{p}g3, \hat{p}g2, \hat{p}g1 \} = \quad (2.11)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Wie wir schon in Kapitel 1.3.3 gesehen haben, können wir in dieser neuen Basis die *Prozess-Fidelity* F_P des Phasengatters direkt aus der Größe des Eintrags $F_P = \chi_{11}^{[exp]} = \chi_{(\hat{P}G, \hat{P}G)}^{[exp]}$ ablesen (Abbildung 2.45). Wir erhalten eine *Prozess-Fidelity* von $F_P = 0,818$.

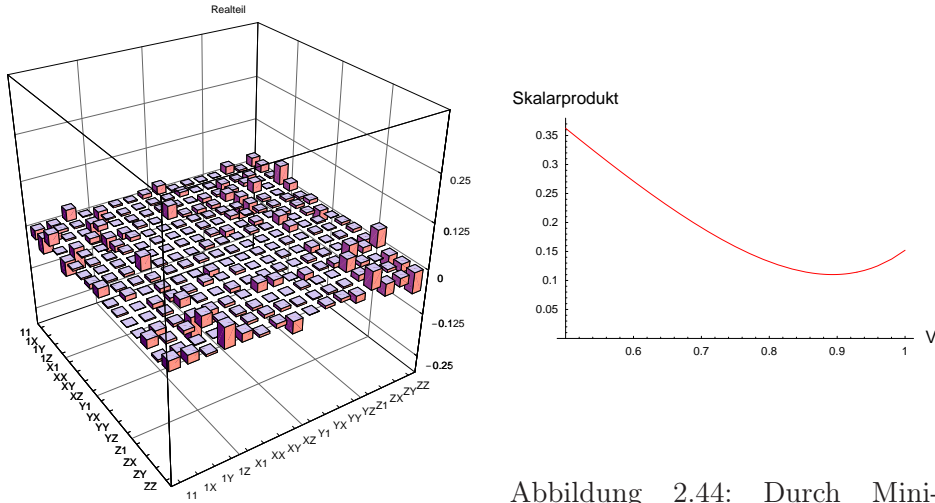


Abbildung 2.43: Realteil der Differenz $\Delta\chi_{ml}$ zwischen der gemessenen Prozesstomographie-Matrix $\chi_{ml}^{[exp]}$ und einer mit $\hat{Q}_{[V]}(\hat{\rho})$ bestimmten Modell-Matrix $\chi_{ml}^{[V=0,9]}$ für $V = 0.9$.

Abbildung 2.44: Durch Minimierung des Skalarprodukfts $Sp(\Delta\chi_{ml} \cdot \Delta\chi_{ml})$ erhalten wir diejenige *Visibility* V , bei der $\chi_{ml}^{[V]}$ die größte Übereinstimmung mit der experimentellen Matrix $\chi_{ml}^{[exp]}$ hat.

Da wir durch die Kenntnis der Matrix $\chi_{ml}^{[exp]}$ auch in der Lage sind, den Ausgangszustand des Phasengatters für einen beliebigen Eingangszustand numerisch zu bestimmen, können wir in einer Simulation zum Beispiel eine obere Schranke für die *minimale Gatter-Fidelity* F_g (Gleichung (1.30)) bestimmen.

2.2.5.2 Simulation des Gatters

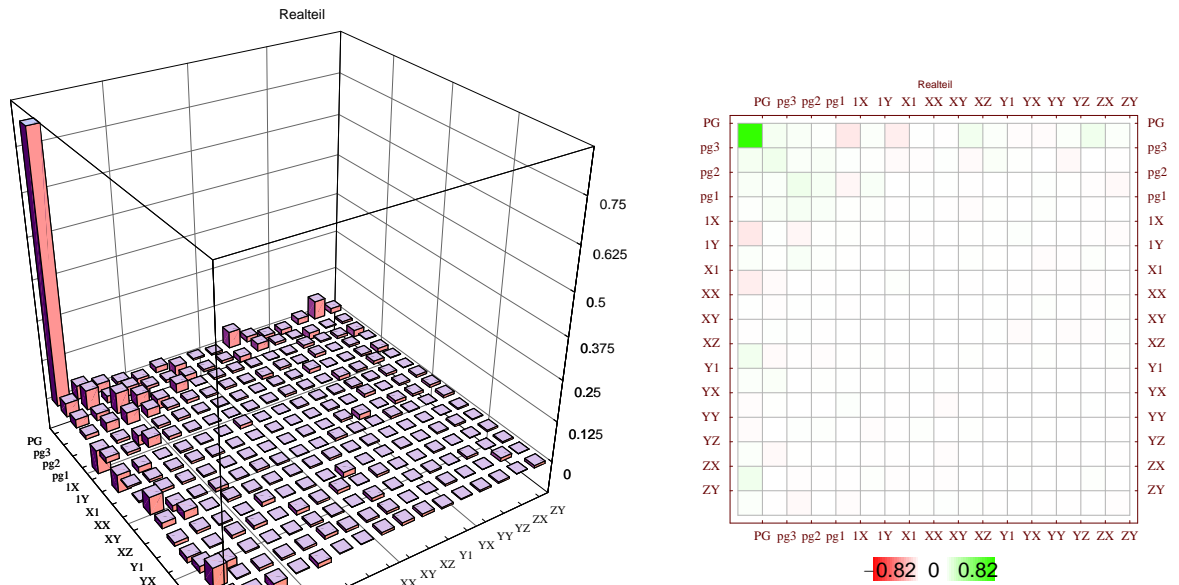
In diesem Abschnitt wollen wir anhand einer numerischen Simulation einige Eigenschaften des Phasengatters, die auf analytischem Wege nur schwer zu erhalten sind untersuchen, und auch auf Besonderheiten der Prozesstomographie selbst eingehen. Dazu gehen wir folgendermaßen vor:

Wir kennen die Prozesstomographie-Matrix $\chi_{ml}^{[exp]}$, die unser Phasengatter vollständig beschreibt. Also können wir für jeden beliebigen Eingangszustand $\hat{\rho}$ den zugehörigen Ausgangszustand $\hat{\rho}'$ bestimmen, indem wir Gleichung (1.27) anwenden:

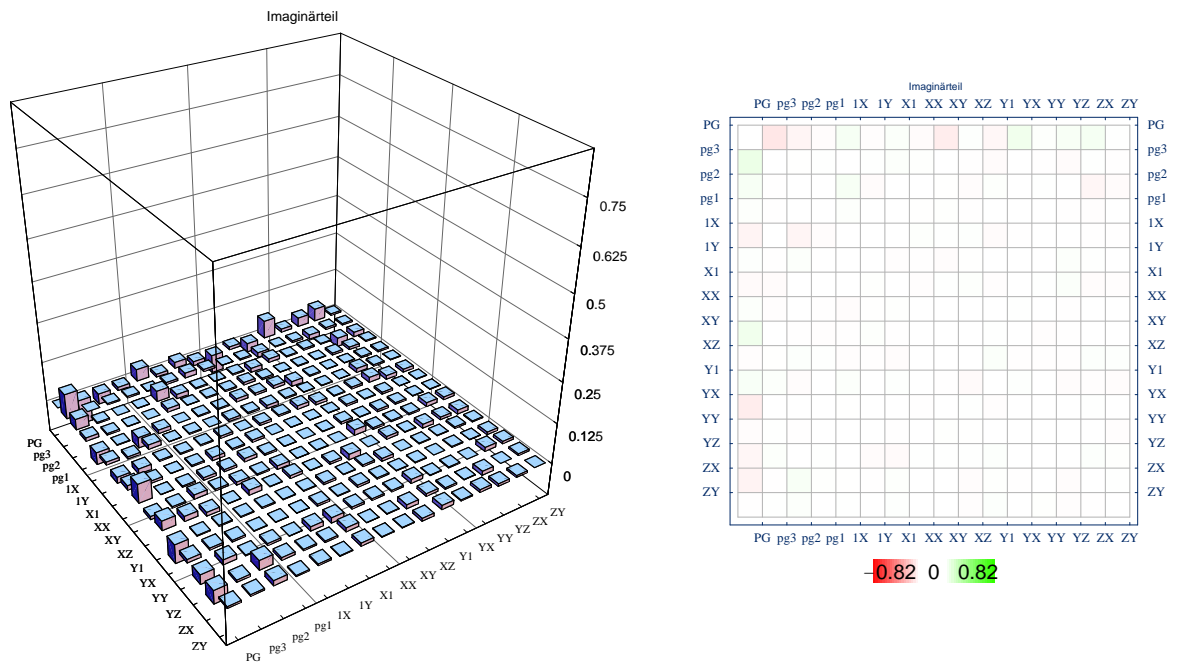
$$\sum_{m,l} \chi_{ml}^{[exp]} \hat{E}_m \hat{\rho} \hat{E}_l^\dagger = \hat{Q}(\hat{\rho}) = \hat{\rho}'$$

$$\hat{\rho} \longrightarrow \boxed{\hat{Q}} \longrightarrow \hat{\rho}'$$

2.2 Prozesstomographie des Phasengatters Erzeugung des Cluster-Zustands



Realteil der Prozesstomographie-Matrix $\chi_{ml}^{[exp]}$.



Imaginärteil von $\chi_{ml}^{[exp]}$.

Abbildung 2.45: Darstellung von $\chi_{ml}^{[exp]}$ in der Phasengatter-Basis.

Für den Zustand $\hat{\rho}'$ können wir nun verschiedene Eigenschaften betrachten, wie beispielsweise seine Nähe zum idealen Ausgangszustand $\hat{\rho}^{[ideal]} = \hat{P}\hat{G}\hat{\rho}\hat{P}\hat{G}$. Tun wir dies nicht nur für einen einzigen Zustand $\hat{\rho}$ sondern für eine sehr große Anzahl von Zuständen $\hat{\rho}_i$, so können wir dadurch Mittelwert und Streuung für die an $\hat{\rho}'_i$ bestimmten Eigenschaften ermitteln und damit Charakteristika der Gatter-Operation \hat{Q} untersuchen (Abbildung 2.46).

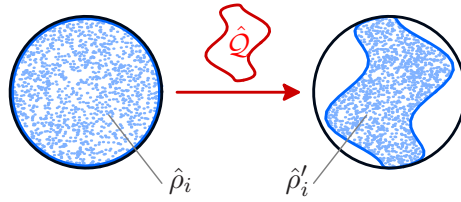


Abbildung 2.46: Durch die Anwendung der Gatter-Transformation \hat{Q} auf eine sehr große Zahl von Eingangszuständen $\hat{\rho}_i$, werden die Charakteristika von \hat{Q} an den Eigenschaften der Ausgangszustände $\hat{\rho}'_i$ deutlich.

Da die Gatter-Transformation eine lineare Abbildung ist, reicht es aus, reine Eingangszustände $|\psi\rangle$ zu betrachten. Die Transformation auf gemischte Zustände $\hat{\rho}$ kann dann als Mischung der schon transformierten reinen Zustände $\hat{Q}(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)$ gesehen werden:

$$\hat{Q}(\hat{\rho}) = \hat{Q}\left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right) = \sum_i p_i \hat{Q}(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)$$

Die reinen Zustände, die wir für die Simulation verwenden, sollen gleichverteilt auf dem Zustandsraum sein, damit sie repräsentativ für alle Zustände sind. Gleichverteilung bedeutet, dass sich die Verteilung nicht verändern darf, wenn wir eine Drehung im Zustandsraum durchführen [20]. Eine solche rotationsinvariante Verteilung für stochastisch unabhängige reelle Variablen ist die multidimensionale Standardnormalverteilung mit Erwartungswert $\mu = 0$ und Standardabweichung $\sigma = 1$ [37]. Die Rotationssymmetrie dieser Verteilung ist auch schön in Abbildung 2.47 zu sehen.

Damit die Zustände dieser Verteilung folgen, parametrisieren wir einen unnormierten 2-Qubit-Zustand $|\psi\rangle$ mit den 8 unabhängigen Parametern $a_i : i = 1 \dots 8$ auf folgende Weise:

$$|\psi\rangle = (a_1 + ia_2)|HH\rangle + (a_3 + ia_4)|HV\rangle + (a_5 + ia_6)|VH\rangle + (a_7 + ia_8)|VV\rangle \quad (2.12)$$

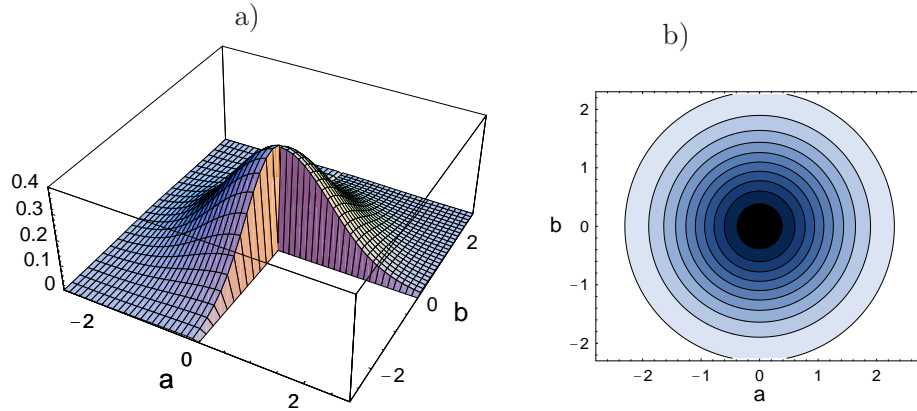


Abbildung 2.47: In a) ist die gemeinsame Verteilung zweier standardnormalverteilter Variablen \mathbf{a} und \mathbf{b} zu sehen. Die Höhenlinien (b) dieser zweidimensionalen Verteilung sind konzentrische Kreise, woraus ihre Rotationssymmetrie folgt.

Wählen wir die a_i gemäß einer Standardnormalverteilung mit Wahrscheinlichkeitsdichte $f(a_i)$, so erhalten wir eine rotationsinvariante Verteilung beliebiger Zustände im Hilbertraum:

$$f(a_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a_i^2}{2}} \quad (2.13)$$

Allerdings sind die Zustände, die auf diese Weise erzeugt werden, noch nicht normiert. Die Normierung auf $|\psi\rangle\langle\psi| = 1$ können wir jedoch einfach im Anschluss an die Wahl der a_i durchführen, da sie keinen Einfluss auf die Rotationsinvarianz hat.

Für die folgende Simulation werden wir eine Menge von gleichverteilten Eingangszuständen $\{|\psi_k\rangle\}$ mit $k = 1 \dots 50\,000$ betrachten. Zu jedem Zustand $|\psi_k\rangle$ können wir den Ausgangszustand $\hat{\tau}_k$ numerisch berechnen:

$$\{\hat{\tau}_k\} = \left\{ \hat{Q}(|\psi_k\rangle\langle\psi_k|) \right\}$$

Dadurch sind wir in der Lage, auch die *Fidelity* \mathcal{F} zwischen den berechneten und den idealen Ausgangszuständen zu bestimmen, die wir als *Gatter-Fidelity* \mathcal{F}_G bezeichnen wollen:

$$\{\mathcal{F}_G(k)\} = \left\{ \langle\psi_k| \hat{P}G^\dagger \cdot \hat{\tau}_k \cdot \hat{P}G |\psi_k\rangle \right\}$$

Wir verfahren ebenso mit der *linearen Entropie*, die als $S_{lin} = 1 - Sp(\hat{\rho}^2)$ definiert ist und dadurch ein Maß für die Reinheit eines Zustands (Gleichung (1.8)) darstellt:

$$\{S_{lin}(k)\} = \left\{ 1 - Sp(\hat{\tau}_k^2) \right\}$$

Tragen wir die *Gatter-Fidelity* \mathcal{F}_G eines Zustands gegen seine *lineare Entropie* S_{lin} auf, wie in Abbildung 2.48 für alle Zustände der Simulation dargestellt, so finden wir eine starke Korrelation zwischen den beiden Größen.

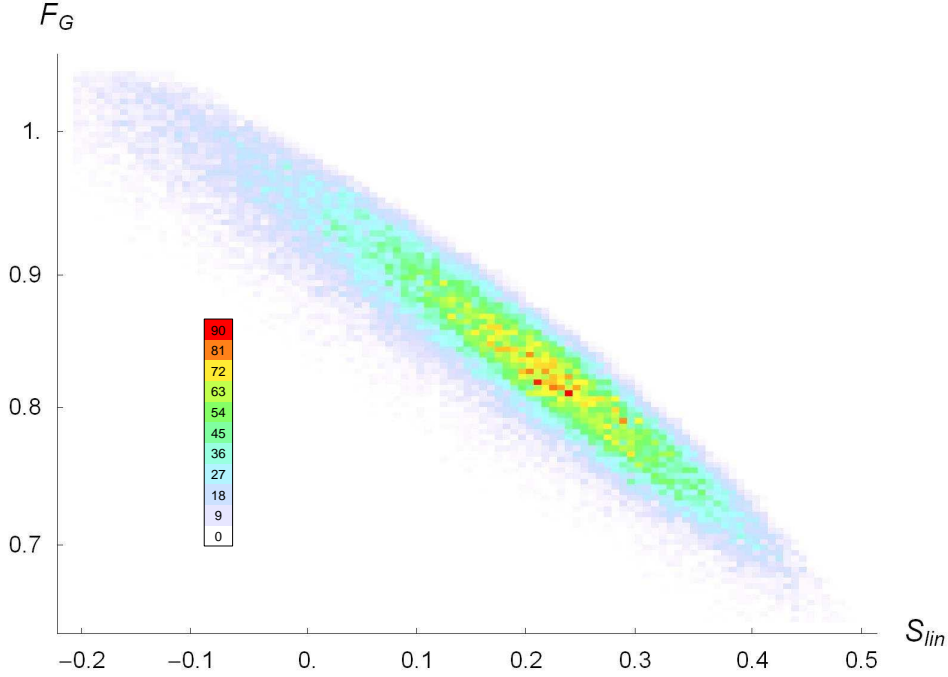


Abbildung 2.48: Zusammenhang zwischen der *Gatter-Fidelity* \mathcal{F}_G und der *linearen Entropie* S_{lin} für eine Simulation des experimentellen Phasengatters.

Diese Korrelation zwischen \mathcal{F}_G und S_{lin} legt den Schluss nahe, dass niedrige *Gatter-Fidelities* im wesentlichen die Folge von inkohärenten Anteilen im Ausgangszustand sind, die sowohl die *lineare Entropie* vergrößern, als auch die *Gatter-Fidelity* herabsetzen. Das stimmt auch mit unserem Modell des nicht-perfekten Phasengatters aus Gleichung (2.10) überein, das mit der gleichen Annahme die Gatter-Transformation gut beschreiben konnte. Das experimentelle Phasengatter führt demnach prinzipiell die richtige Transformation durch.

Betrachten wir die Verteilung der *Fidelity* \mathcal{F} alleine (Abbildung 2.49), so finden wir eine mittlere *Gatter-Fidelity* aller simulierten Zustände bei $\overline{\mathcal{F}_G} = 0,854$ mit einer Standardabweichung von $\sigma_{\mathcal{F}_G} = 0,084$.

Über den folgenden Zusammenhang, der zwischen der *Prozess-Fidelity* F_P und der mittleren *Gatter-Fidelity* [25] besteht, erhalten wir für ein n-Qubit-Gatter mit $d = 2^n$:

$$\overline{\mathcal{F}_G} = \frac{d \cdot F_P + 1}{d + 1} = \frac{4 \cdot 0,818 + 1}{4 + 1} = 0,8544$$

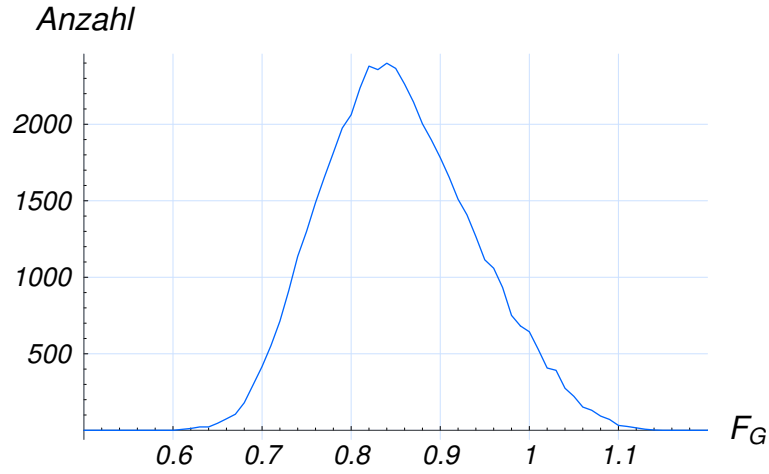


Abbildung 2.49: Verteilung der *Gatter-Fidelity* \mathcal{F}_G für eine Simulation des experimentellen Phasengatters mit $\sim 50\,000$ Eingangszuständen. Die mittlere *Gatter-Fidelity* liegt bei $\overline{\mathcal{F}_G} = 0,854$, die *minimale Gatter-Fidelity* bei $F_g \leq 0,62$.

Das stimmt sehr gut mit dem Wert, den wir aus der Simulation gewonnen haben, überein. Wir können auch die *minimale Gatter-Fidelity* durch die kleinste *Gatter-Fidelity* aus unserer Simulation zu $F_g \approx 0,62$ abschätzen.

Auffällig ist jedoch, dass wir durch die Simulation auch Zustände mit einer *Gatter-Fidelity* $\mathcal{F}_G > 1$ erhalten. Wir betrachten nun einen solchen Zustand $\hat{\rho}$ mit $\mathcal{F}_G > 1$ und stellen ihn in seiner Eigenbasis dar:

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|$$

Da die *Gatter-Fidelity* über die *Fidelity* $\mathcal{F} \leq 1$ definiert ist, können wir eine *Gatter-Fidelity* $\mathcal{F}_G > 1$ nur erklären, wenn mindestens eine der Wahrscheinlichkeiten p_k negativ ist, was keinem physikalisch sinnvollem Zustand entspricht. Da wir aber für die Simulation reine Eingangszustände verwenden, muss der Grund für nicht-physikalische Zustände in der Transformation $\hat{Q}^{[exp]}(\hat{\rho})$ liegen. Betrachten wir die Matrix $\chi_{ml}^{[exp]}$ genauer, so finden wir, dass sie negative Eigenwerte besitzt. Stellen wir sie in ihrer Eigenbasis U_i dar (Gleichung (1.19)), so entsprechen ihre Eigenwerte λ_i den Einträgen auf der Hauptdiagonalen von $\chi_{ml}^{[exp]}$.

$$\hat{Q}(\hat{\rho}) = \sum_i \lambda_i U_i \hat{\rho} U_i^\dagger = \sum_i \chi_{ii}^{[exp]} U_i \hat{\rho} U_i^\dagger \quad (2.14)$$

In dieser Form können wir den Eintrag $\chi_{ii}^{[exp]}$ als die Wahrscheinlichkeit interpretieren, mit der das Ergebnis aus $U_i \hat{\rho} U_i^\dagger$ dem Ausgangszustand in-

kohärent beigemischt wird. Das wird deutlich, indem wir das Gatter auf den reinen Zustand $\hat{\rho}_\gamma = |\gamma\rangle\langle\gamma|$ anwenden, wodurch wir eine Mischung aus den reinen Zuständen $|\gamma'_i\rangle\langle\gamma'_i| = U_i |\gamma\rangle\langle\gamma| U_i^\dagger$ erhalten:

$$\begin{aligned}\hat{Q}(\hat{\rho}_\gamma) &= \chi_{11} U_1 |\gamma\rangle\langle\gamma| U_1^\dagger + \chi_{22} U_2 |\gamma\rangle\langle\gamma| U_2^\dagger + \dots = \\ &= \chi_{11} |\gamma'_1\rangle\langle\gamma'_1| + \chi_{22} |\gamma'_2\rangle\langle\gamma'_2| + \dots\end{aligned}$$

Aus diesem Grund beschreibt ein $\chi_{ml}^{[exp]}$ mit negativen Eigenwerten, welche negative Wahrscheinlichkeiten repräsentieren, keinen physikalisch sinnvollen Prozess.

Doch warum hat $\chi_{ml}^{[exp]}$ diese nicht-physikalische Eigenschaft, obwohl wir zur Berechnung der Prozesstomographie-Matrix $\chi_{ml}^{[exp]}$ nur physikalisch sinnvolle Dichtematrizen verwendet haben? Dafür gibt es zwei Gründe:

Zum einen vernachlässigen wir, indem wir alle gemessenen Dichtematrizen $\hat{\rho}_i^{[exp]}$ auf $Sp(\hat{\rho}_i^{[exp]})=1$ normieren, polarisationsabhängige Abschwächungen bei der Gatter-Transformation. Um dies zu verdeutlichen, nehmen wir als Beispiel ein 1-Qubit-Gatter \hat{Q}_1 an, das die Eingangspolarisation $|V\rangle$ auf ein Drittel der Eingangs-Intensität abschwächt. Solch eine Transformation führen beispielsweise die aus Kapitel 2.2.2 bekannten Strahlteiler-Plättchen durch, weshalb es sich auf jeden Fall um einen physikalisch sinnvollen Prozess handelt:

$$\begin{array}{lclcl} |H\rangle\langle H| & \longrightarrow & \boxed{\hat{Q}_1} & \longrightarrow & |H\rangle\langle H| \\ |V\rangle\langle V| & \longrightarrow & \boxed{\hat{Q}_1} & \longrightarrow & \frac{1}{3} |V\rangle\langle V| \\ |+\rangle\langle +| & \longrightarrow & \boxed{\hat{Q}_1} & \longrightarrow & \frac{2}{3} \left| \frac{\sqrt{3}}{2} H + \frac{1}{2} V \right\rangle \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2} H + \frac{1}{2} V \right| \end{array}$$

Normieren wir aber alle gemessenen Dichtematrizen, so erhalten wir eine Transformation \hat{Q}_N , die keinem physikalischen Prozess mehr entspricht, da sie nun ein Gatter beschreibt, das $|H\rangle$ und $|V\rangle$ unverändert lässt, aber deren Superposition $|+\rangle$ in einen anderen Zustand transformiert.

$$\begin{array}{lclcl} |H\rangle\langle H| & \longrightarrow & \boxed{\hat{Q}_N} & \longrightarrow & |H\rangle\langle H| \\ |V\rangle\langle V| & \longrightarrow & \boxed{\hat{Q}_N} & \longrightarrow & |V\rangle\langle V| \\ |+\rangle\langle +| & \longrightarrow & \boxed{\hat{Q}_N} & \xrightarrow{???} & \left| \frac{\sqrt{3}}{2} H + \frac{1}{2} V \right\rangle \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2} H + \frac{1}{2} V \right| \end{array}$$

Wir können dieses Problem umgehen, indem wir die mit der *maximum-likelihood*-Methode bestimmten Dichtematrizen mit den zugehörigen Zählraten gewichten, die den Intensitäten entsprechen, die das Gatter transmittiert.

Auf diese Weise erhalten wir die richtige Gatter-Transformation. Problematisch dabei ist jedoch, dass es für Gatter, die Transformationen dieser Art durchführen, keine Basis aus unitären Operatoren gibt, in der die Matrix χ_{ml} Diagonalform hat. Dadurch ergeben sich Schwierigkeiten zum Beispiel bei der Bestimmung der *Prozess-Fidelity*.

Zum anderen ist es eine Schwäche der Prozesstomographie, dass bisher noch kein analytisches Verfahren zur Behandlung von Fehlern für die Matrix $\chi_{ml}^{[exp]}$ existiert. Da die experimentell bestimmten Dichtematrizen $\hat{\rho}_i^{[exp]}$ immer einen statistischen Fehler beinhalten, werden wir zufällige Abweichungen ε_i von der exakten Dichtematrix $\hat{\rho}_i^{[ideal]}$ bekommen:

$$\hat{\rho}_i^{[exp]} = \hat{\rho}_i^{[ideal]} + \hat{\varepsilon}_i \quad \text{mit} \quad |\varepsilon_i|_{ml} < \varepsilon \quad (2.15)$$

Während wir aus den idealen Dichtematrizen $\hat{\rho}_i^{[ideal]}$ den physikalischen Prozess rekonstruieren könnten, ist es für die Matrizen $\hat{\rho}_i^{[exp]}$ nicht notwendig, dass sie durch einen physikalischen Prozess beschreibbar sind. Der Grund dafür ist, dass es im Allgemeinen keinen physikalisch sinnvollen Prozess gibt, der die statistischen Abweichungen $\hat{\varepsilon}_i$ deterministisch aus den jeweiligen Eingangszuständen erzeugen kann.

Ein möglicher Weg diese Problematik zu beheben wäre es, eine erweiterte *maximum-likelihood*-Methode zu entwickeln, die diejenige Prozesstomographie-Matrix $\chi_{ml}^{[opt]}$ bestimmt, die einen physikalisch sinnvollen Prozess beschreibt und zugleich die größte Wahrscheinlichkeit besitzt, die gemessenen Dichtematrizen $\hat{\rho}_i^{[exp]}$ zu erzeugen.

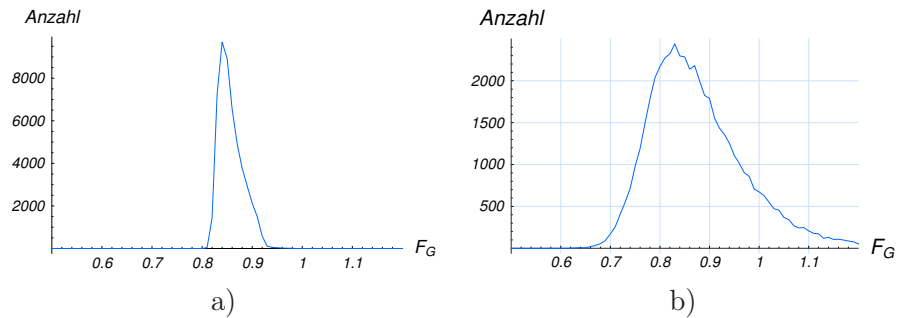


Abbildung 2.50: *Fidelity*-Verteilung des Phasengatter-Modells $\hat{Q}_{[V=0,9]}(\hat{\rho})$ mit $\sim 50\,000$ Eingangszuständen. Bei der Simulation b) wurden zufällige Schwankungen mit $\varepsilon = 0,05$ auf den Dichtematrizen erzeugt, aus denen $\chi_{ml}^{[V=0,9]}$ bestimmt wird.

Um zu demonstrieren, dass statistische Fehler durchaus eine große Wirkung auf die Gatterbeschreibung haben, vergleichen wir die beiden *Gatter*-

Fidelity Verteilungen (Abbildung 2.50 a und b). Beide Verteilungen stammen aus dem selben Phasengatter-Modell $\hat{Q}_{[V=0,9]}(\hat{\rho})$, jedoch haben wir bei Verteilung b) zufällige Schwankungen mit $\varepsilon = 0,05$ (Gleichung (2.15)) auf den Dichtematrizen, aus denen $\chi_{ml}^{[V=0,9]}$ bestimmt wird, erzeugt. Während die mittlere *Gatter-Fidelity* bei beiden Verteilungen nahezu gleich ist, unterscheiden sie sich erheblich in ihren Breiten.

Wir haben gesehen, dass noch Bedarf für Verbesserungen des momentanen Prozesstomographie-Schemas besteht. Dennoch konnten wir zeigen, dass das Phasengatter mit einer *Prozess-Fidelity* $F_P = 0,818$ und einer mittleren *Gatter-Fidelity* $\overline{F_G} = 0,854$ korrekt arbeitet. Um seine Einsatzfähigkeit unter Beweis zu stellen wollen wir im nächsten Kapitel den durch das Phasengatter erzeugten *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$ untersuchen.

2.2 Prozesstomographie des Phasengatters Erzeugung des Cluster-Zustands

Kapitel 3

Charakterisierung des Cluster-Zustands

Wir wollen in diesem Kapitel den experimentell erzeugten *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle$ untersuchen. Dazu werden wir seine Eigenschaften mit den theoretischen Vorhersagen vergleichen und dabei echte 4-Qubit-Verschrankung nachweisen [38].

In Kapitel 1.4 haben wir gesehen, dass wir aus einem $|\mathcal{C}_n\rangle$ durch eine Messung in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis einen $|\mathcal{C}_{n-1}\rangle$ erzeugen können. Auch diese Eigenschaft der *Cluster-Zustände* wollen wir experimentell nachprüfen und dabei die *Cluster-Zustände* $|\mathcal{C}_3^{exp}\rangle$ und $|\mathcal{C}_2^{exp}\rangle$ untersuchen.

3.1 Der 4-Qubit Cluster-Zustand

Die Beobachtung der verschränkten 4-Photonen-Zustände erfolgt in der sogenannten Koinzidenz-Basis, das heißt in jeder der vier Moden **a** . . . **d** muss ein Photon detektiert werden. Dazu bestimmen wir die Anzahl an 4-fach-Koinzidenzen $c'_{(i_a j_b m_c n_d)}$, die wir für ein bestimmtes Messergebnis $(i_a j_b m_c n_d)$ erhalten. Die Indizes $i_a, j_b, m_c, n_d \in \{0, 1\}$ können dabei zwei Werte annehmen, die den zwei möglichen Ergebnissen einer 1-Qubit Messung in einer beliebigen Basis und der jeweiligen Mode (**a**, **b**, **c**, **d**) entsprechen. In einer bestimmten Basis existieren also für vier Qubits insgesamt 16 mögliche 4-fach-Koinzidenz-Ereignisse. Führen wir zum Beispiel in allen vier Moden eine Messung in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis durch, so erhalten wir die Zählraten $c'_{HHHH}, c'_{HHHV}, c'_{HHVH}, c'_{HHVV}, c'_{HVHH}$ usw.

Um die unterschiedlichen Effizienzen auszugleichen, mit denen Photonen von den verschiedenen Detektoren erfasst werden, bestimmen wir die relativen Effizienzen η_k jeder Mode $k = \mathbf{a} \dots \mathbf{d}$.

Diese erhalten wir, indem wir Photonen mit definierter Polarisation in einer der Moden $k = \mathbf{a} \dots \mathbf{d}$ analysieren. Durch Drehen der Richtung der Eingangspolarisation in dieser Mode verändert sich das Aufteilungsverhältnis

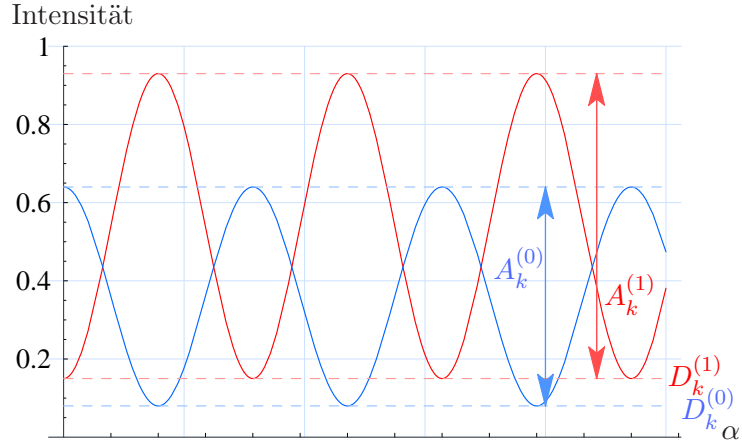


Abbildung 3.1: Verlauf der gemessenen Intensitäten in zwei Detektoren der gleichen Mode in Abhängigkeit vom Winkel α der Eingangspolarisation. Das Verhältnis der Amplituden $A_k^{(0)}$ und $A_k^{(1)}$ entspricht der relativen Effizienz η_k . $D_k^{(0)}$ und $D_k^{(1)}$ bezeichnen die Dunkelzählraten der jeweiligen Detektoren.

der Photonen auf die beiden Detektoren D_0 und D_1 , die den Messergebnissen $|0\rangle_k$ und $|1\rangle_k$ entsprechen. Dadurch erhalten wir, in Abhängigkeit vom Winkel α der Eingangspolarisation, einen sinusförmigen Verlauf in den detektierten Intensitäten I (Abbildung 3.1):

$$I_k^{(0)}(\alpha) = D_k^{(0)} + A_k^{(0)} \sin^2(\alpha) \quad I_k^{(1)}(\alpha) = D_k^{(1)} + A_k^{(1)} \cos^2(\alpha)$$

Dabei bezeichnet $D_k^{(m)}$ die Dunkelzählrate des Detektors D_m und $A_k^{(m)}$ die Amplitude des Intensitätsverlaufs. Die relative Effizienz η_k entspricht dann dem Verhältnis der beiden Amplituden, $\eta_k = \frac{A_k^{(0)}}{A_k^{(1)}}$.

Die effizienz-korrigierten Zählraten können dabei aus den relativen Effizienzen η_k auf folgende Weise berechnet werden:

$$c_{(i_{\mathbf{a}} j_{\mathbf{b}} m_{\mathbf{c}} n_{\mathbf{d}})} = \eta_{(i_{\mathbf{a}} j_{\mathbf{b}} m_{\mathbf{c}} n_{\mathbf{d}})} \cdot c'_{(i_{\mathbf{a}} j_{\mathbf{b}} m_{\mathbf{c}} n_{\mathbf{d}})} \quad \text{mit} \\ \eta_{(i_{\mathbf{a}} j_{\mathbf{b}} m_{\mathbf{c}} n_{\mathbf{d}})} = (\eta_{\mathbf{a}})^{i_{\mathbf{a}}} (\eta_{\mathbf{b}})^{j_{\mathbf{b}}} (\eta_{\mathbf{c}})^{m_{\mathbf{c}}} (\eta_{\mathbf{d}})^{n_{\mathbf{d}}} \quad (3.1)$$

Betrachten wir dazu als Beispiel die Zählrate c'_{HVVH} . Die effizienz-korrigierte Zählrate c_{HVVH} erhalten wir aus:

$$c_{HVVH} = \eta_{HVVH} \cdot c'_{HVVH} = \eta_{0110} \cdot c'_{HVVH} = \\ = (\eta_{\mathbf{a}})^0 (\eta_{\mathbf{b}})^1 (\eta_{\mathbf{c}})^1 (\eta_{\mathbf{d}})^0 \cdot c'_{HVVH} = \\ = \eta_{\mathbf{b}} \eta_{\mathbf{c}} \cdot c'_{HVVH} = \frac{A_{\mathbf{b}}^{(0)}}{A_{\mathbf{b}}^{(1)}} \cdot \frac{A_{\mathbf{c}}^{(0)}}{A_{\mathbf{c}}^{(1)}} \cdot c'_{HVVH}$$

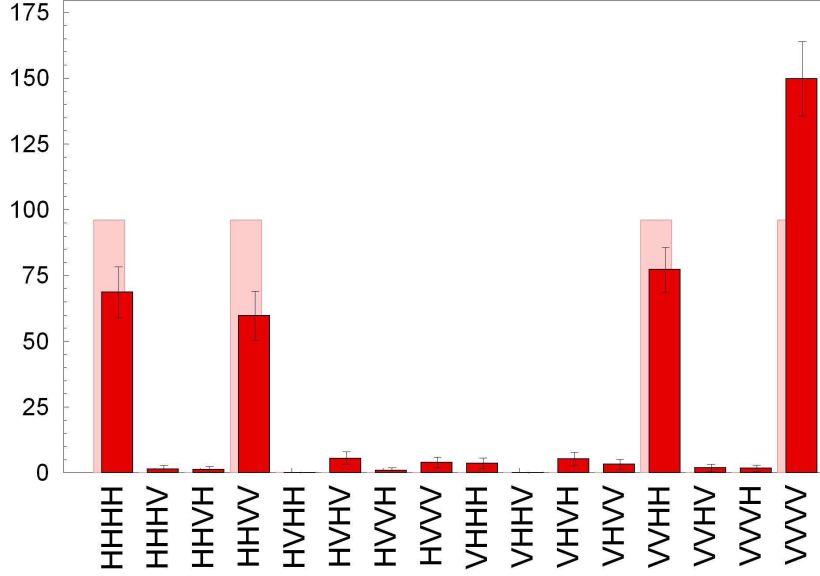


Abbildung 3.2: **Zählraten** für 4-fach Koinzidenzen bei einer Messung am $|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle$ in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis. Die Dauer der Messung betrug 120 Minuten bei einer Zählrate von 3,2 Koinzidenzen pro Minute. Die **hellroten** Balken im Hintergrund repräsentieren die Zählraten, die wir für einen perfekten *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$ bei gleicher Gesamtzählrate in dieser Basis erwarten würden.

Die bezüglich der Effizienz korrigierten Zählraten werden anschließend noch mit einem Faktor multipliziert, so dass die Summe der Zählraten sich gegenüber der Summe der nicht-korrigierten Zählraten nicht verändert.

In unserem Experiment haben wir eine 4-fach-Koinzidenz-Zählrate von etwa 2,9 Koinzidenzen pro Minute beobachten können, was bei einer Beobachtungszeit von 120 Minuten pro Basis insgesamt ungefähr 350 Koinzidenzen entspricht. Stellen wir die Zählraten $c_{(i_a j_b m_c n_d)}$ in einem Balkendiagramm dar, so erwarten wir beispielsweise für eine Messung in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis am *Cluster-Zustand*

$$|\mathcal{C}_4^\circ\rangle = |HHHH\rangle + |HHVV\rangle + |VVHH\rangle - |VVVV\rangle$$

nur Koinzidenzen, die den vier genannten Termen entsprechen, also c_{HHHH} , c_{HHVV} , c_{VVHH} und c_{VVVV} . Das bestätigt sich auch, wenn wir Abbildung 3.2 betrachten. Die hellen Balken im Hintergrund repräsentieren die Zählraten, die wir für den perfekten *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$ bei gleicher Gesamtzählrate erwarten würden. Daraus ist deutlich zu sehen, dass der gemessene $|VVVV\rangle$ -Term überhöht ist. In Kapitel 2.2.1 bei der Analyse des

Phasengatter-*Rauschens*, hatten wir schon festgestellt, dass dies eine Folge der nicht-perfekten Interferenz am Überlappstrahlteiler *PST* ist.

Wir haben in Kapitel 1.2 gesehen, dass wir Messungen in mehreren Basen durchführen müssen, um den *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle$ von separablen Zuständen abzugrenzen. Darum wählen wir $\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$ und $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x$ als weitere Basen.

In diesen beiden Basen, die in Abbildung 3.3 dargestellt sind, können wir erkennen, dass weiterhin nur vier dominierende Koinzidenzen mit hoher Zählrate existieren. Daraus können wir die Kohärenz des Zustands ablesen. In der Tat reichen diese drei betrachteten Basen auch aus, um mit dem *Verschrankungs-Zeugen* $\hat{\mathcal{W}}_{|\mathcal{C}_4^\circ\rangle}$ die echte 4-Qubit-Verschrankung des $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$ zu zeigen [39]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}}_{|\mathcal{C}_4^\circ\rangle} &= 3 \cdot \hat{\mathbf{1}}^{(\otimes 4)} - \\ &\quad - \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}} + \hat{\mathbf{1}}^{(\otimes 4)}) (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x + \hat{\mathbf{1}}^{(\otimes 4)}) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbf{1}} + \hat{\mathbf{1}}^{(\otimes 4)}) (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z + \hat{\mathbf{1}}^{(\otimes 4)}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Der Erwartungswert des $\hat{\mathcal{W}}_{|\mathcal{C}_4^\circ\rangle}$ für den idealen $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$ liegt bei $Sp(\hat{\mathcal{W}}_{|\mathcal{C}_4^\circ\rangle} |\mathcal{C}_4^\circ\rangle\langle\mathcal{C}_4^\circ|) = -1$. Experimentell finden wir einen Erwartungswert, der mit einem Abstand von etwa sechs Standardabweichungen die Verschrankung zeigt:

$$Sp(\hat{\mathcal{W}}_{|\mathcal{C}_4^\circ\rangle} |\mathcal{C}_4^{exp}\rangle\langle\mathcal{C}_4^{exp}|) = -0,299 \pm 0,050$$

Betrachten wir Abbildung 3.3 genauer, so erkennen wir neben den vier dominierenden Koinzidenzen auch eine Erhöhung der Koinzidenzen $|VV++\rangle$ und $|VV--\rangle$ bzw. $|++VV\rangle$ und $|--VV\rangle$. Sie entstehen aus dem inkohärenten Anteil des *Phasengatter-Rauschens* (vgl. Abschnitt 2.2.1):

$$\begin{aligned} |VVVV\rangle\langle VVVV| &= \frac{1}{2}|VV++\rangle\langle VV++| + \frac{1}{2}|VV--\rangle\langle VV--| = \\ &= \frac{1}{2}|++VV\rangle\langle ++VV| + \frac{1}{2}|--VV\rangle\langle --VV| \end{aligned}$$

Diese Abweichungen vom idealen *Cluster-Zustand* sind auch bei einem Vergleich mit dem in Abschnitt 2.2.5.1 vorgestellten Phasengatter-Modell zu sehen. Nehmen wir eine HOM-Dip *Visibility* von $V = 0,81$ an, was durch die Messungen aus Abbildung 2.34 und Abbildung 2.35 nahegelegt wird, so sehen wir eine starke Übereinstimmung zwischen experimentellen und theoretischen Zählraten, die in Abbildung 3.4 dargestellt sind. So ist zum Beispiel die Überhöhung des $|VVVV\rangle\langle VVVV|$ -Terms in der $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$ -Basis fast identisch für Theorie und Experiment. Auch die Höhe der $|++VV\rangle\langle ++VV|$ - und $|--VV\rangle\langle --VV|$ -Anteile in der $\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$ -Basis wird durch das Modell gut beschrieben.

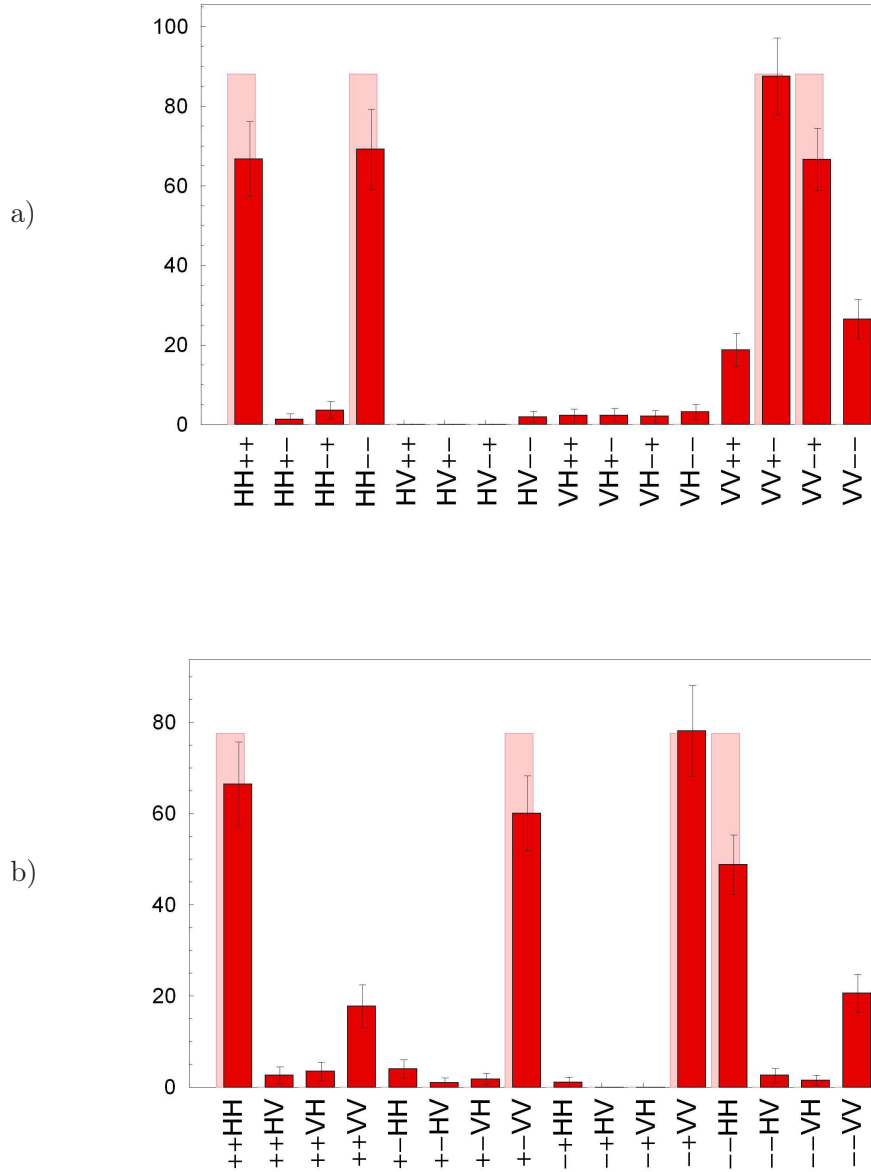


Abbildung 3.3: Der *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle$ in der $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x$ -Basis (a) beziehungsweise in der $\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$ -Basis (b). Im Hintergrund sind die Zählraten für den idealen $|\mathcal{C}_4^{\circ}\rangle$ mit gleicher Gesamtzählrate dargestellt. Die Dauer der Messung betrug 120 Minuten mit durchschnittlichen Zählraten von 2,58 bzw. 2,93 Koinzidenzen pro Minute.

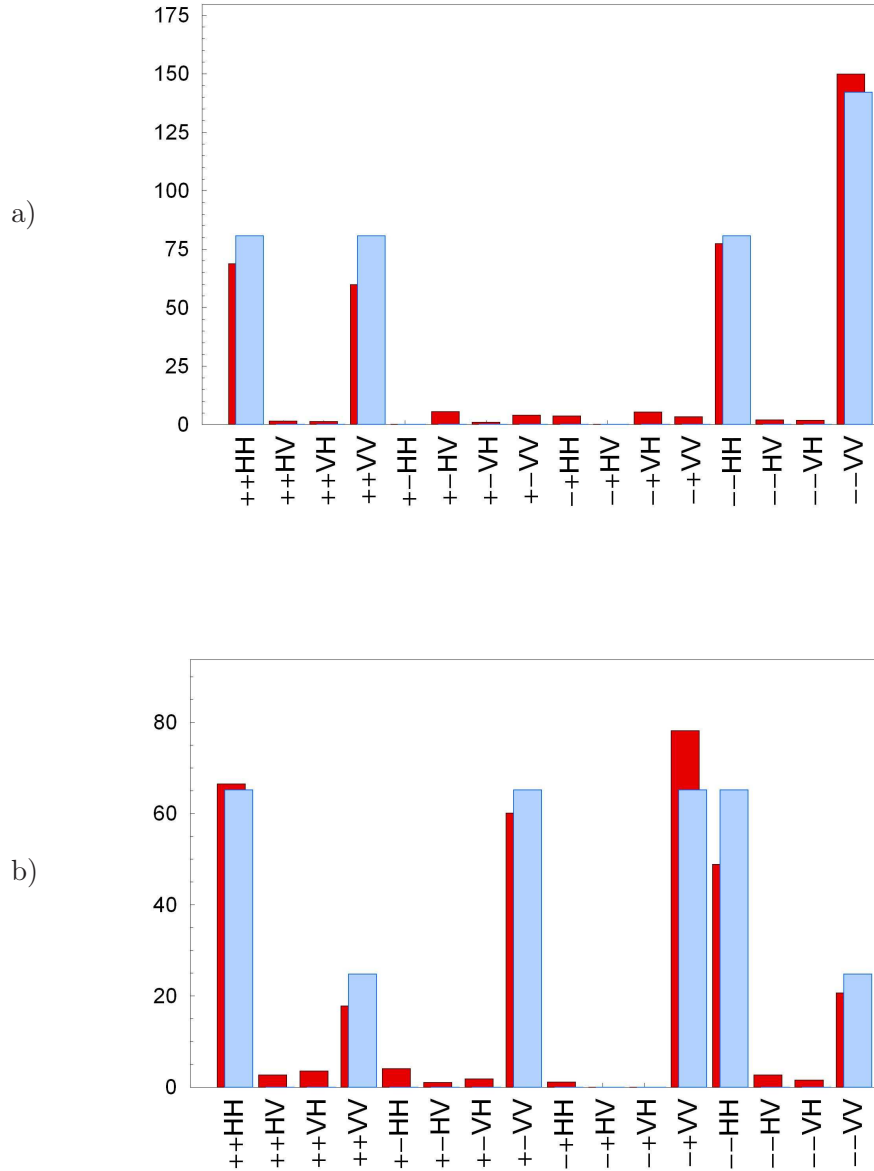


Abbildung 3.4: Die theoretischen Zählraten eines Phasengatter-Modells mit HOM-Dip $Visibility V = 0,81$ im Vergleich mit den experimentell ermittelten Zählraten, die im Hintergrund dargestellt sind. Wir können für die Basen (a) $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$ und (b) $\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$ eine starke Übereinstimmung, auch in der Höhe des inkohärenten Anteils $|VVVV\rangle\langle VVVV| = |++VV\rangle\langle ++VV| + |--VV\rangle\langle --VV|$ feststellen.

Um herauszufinden, wie gut unser Zustand dem idealen *Cluster-Zustand* entspricht, wollen wir die *Fidelity* berechnen. Wie wir schon aus Kapitel 1.4 wissen, hat der *Cluster-Zustand* aufgrund seiner Definition nur 16 verschiedene Korrelationen, die durch die *Stabilizer-Operatoren* S_k [26] dargestellt werden können. Messen wir alle diese Korrelationen \mathcal{K}_k , die in Tabelle 3.1 zusammengefasst sind, so können wir daraus die *Fidelity* \mathcal{F} des $|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle$ an den theoretischen *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_4^\odot\rangle$ ableiten. Eine aufwendige Zustandstomographie zur Bestimmung der *Fidelity* aus den Einträgen der Dichtematrix ist aus diesem Grund, wie wir auch schon in Kapitel 1.4 gesehen haben, nicht erforderlich. Wir erhalten die *Fidelity* aus:

$$\mathcal{F} = \langle \mathcal{C}_4^\odot | \mathcal{C}_4^{exp} \rangle \langle \mathcal{C}_4^{exp} | \mathcal{C}_4^\odot \rangle = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{16} \mathcal{K}_k = 0,741 \pm 0,013$$

Wir können dadurch die große Nähe zum theoretischen *Cluster-Zustand* bestätigen.

k	Stabilizer-Operator S_k	Korrelation \mathcal{K}_k
1	$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}}$	$0,713 \pm 0,044$
2	$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z$	$0,673 \pm 0,044$
3	$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y$	$0,681 \pm 0,066$
4	$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x$	$0,729 \pm 0,062$
5	$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y$	$0,681 \pm 0,064$
6	$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x$	$0,628 \pm 0,066$
7	$-\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}}$	$0,679 \pm 0,043$
8	$-\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z$	$0,690 \pm 0,060$
9	$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$	$0,931 \pm 0,064$
10	$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}$	$0,935 \pm 0,037$
11	$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x$	$0,707 \pm 0,045$
12	$-\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y$	$0,616 \pm 0,067$
13	$\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x$	$0,638 \pm 0,045$
14	$-\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y$	$0,626 \pm 0,067$
15	$\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$	$0,931 \pm 0,036$
16	$\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}$	$1,00 \pm 0,017$
$\mathcal{F} = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{16} \mathcal{K}_k =$		$0,741 \pm 0,013$

Tabelle 3.1: Alle 16 Korrelationen \mathcal{K} der *Stabilizer-Operatoren* des 4-Qubit *Cluster-Zustands* $|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle$.

Wie in Kapitel 1.2 beschrieben, können wir die Verschränkung eines 2-Qubit-Zustands auch über die Verletzung einer BELL-Ungleichung nachweisen. In analoger Weise ist es möglich, für 4-Qubit-Zustände BELL-Ungleichungen zu finden, um deren Verschränkung nachzuweisen. Wir können eine solche Ungleichung, die vom *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_4^\odot\rangle$ verletzt wird, aus den *Stabilizer-Operatoren* ableiten [40]:

$$\begin{aligned} Sp(\mathcal{B}_4 \hat{\rho}) &\leq 2 \quad \text{mit} \\ \mathcal{B}_4 = \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x &- \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y + \\ + \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x &+ \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y \end{aligned} \quad (3.3)$$

Interessanterweise wird diese Ungleichung nicht vom $|GHZ_4\rangle$ -Zustand verletzt, wodurch wir einen Hinweis erhalten, dass sich unser präparierter Zustand vom $|GHZ_4\rangle$ -Zustand unterscheidet. Der theoretisch maximale Erwartungswert, den der *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle$ für die Ungleichung \mathcal{B}_4 hat, ist gegeben durch:

$$Sp(\mathcal{B}_4 |\mathcal{C}_4^\odot\rangle\langle\mathcal{C}_4^\odot|) = 4$$

Experimentell erreichen wir eine Verletzung der BELL-Ungleichung \mathcal{B}_4 mit einem Abstand von etwa sechs Standardabweichungen zur klassischen Grenze:

$$Sp(\mathcal{B}_4 |\mathcal{C}_4^{exp}\rangle\langle\mathcal{C}_4^{exp}|) = 2,73 \pm 0,12$$

Um den präparierten Zustand noch weitergehend zu untersuchen, betrachten wir den $|\mathcal{C}_3^{exp}\rangle$, der durch eine Messung in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis aus dem $|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle$ erzeugt werden kann.

3.2 Der 3-Qubit Cluster-Zustand

Führen wir am *Cluster-Zustand*

$$|\mathcal{C}_4^\odot\rangle = |HHHH\rangle_{\mathbf{abcd}} + |HHVV\rangle_{\mathbf{abcd}} + |VVHH\rangle_{\mathbf{abcd}} - |VVVV\rangle_{\mathbf{abcd}}$$

eine Messung in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis an einem beliebigen Qubit $i = \mathbf{a}\dots\mathbf{d}$ durch, so erhalten wir einen *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_3^\odot\rangle$, der unter lokalen unitären Transformationen äquivalent zu $|GHZ_3\rangle = |HHH\rangle + |VVV\rangle$ ist.

$$|\mathcal{C}_4^\odot\rangle \xrightarrow{\langle\hat{\sigma}_x|} |\mathcal{C}_3^\odot\rangle$$

Messen wir zum Beispiel Qubit \mathbf{a} , so erhalten wir für die beiden möglichen Messergebnisse $|+\rangle_{\mathbf{a}}$ und $|-\rangle_{\mathbf{a}}$ die folgenden beiden Zustände:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\langle+|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle_{\mathbf{abcd}} &= |+HH\rangle_{\mathbf{bcd}} + |-VV\rangle_{\mathbf{bcd}} \quad \text{bzw.} \\ \mathbf{a}\langle-|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle_{\mathbf{abcd}} &= |-HH\rangle_{\mathbf{bcd}} + |+VV\rangle_{\mathbf{bcd}} \end{aligned}$$

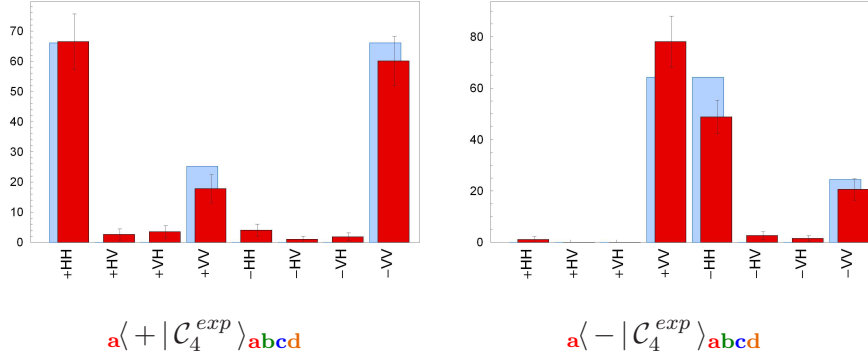


Abbildung 3.5: **Zählraten** der beiden GHZ-Zustände für die Projektion von $|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle$ auf $|+\rangle$ bzw. $|-\rangle$ in der $\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$ -Basis. Die hellenblauen Balken im Hintergrund entsprechen den Vorhersagen der Modellrechnung mit *Visibility* $V = 0,81$.

Wie wir aus Abbildung 3.5 sehen können, stimmt dies auch mit den experimentellen Ergebnissen in der $\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$ -Basis überein.

Um aber echte 3-Qubit-Verschrankung der Zustände $\mathbf{a}\langle \pm | \mathcal{C}_4^{exp} \rangle_{\mathbf{abcd}} = |\mathcal{C}_3^{exp}\rangle_{\mathbf{bcd}}^\pm$ zu zeigen, benutzen wir die *Verschrankungs-Zeugen* $\hat{\mathcal{W}}_{|\mathcal{C}_3^\circ\rangle_{\mathbf{bcd}}^\pm}$ [39]. Dabei ist es wiederum möglich, diese durch *Stabilizer-Operatoren* darzustellen:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}}_{|\mathcal{C}_3^\circ\rangle_{\mathbf{bcd}}^\pm} = & \frac{3}{2} \cdot \hat{\mathbf{1}}^{(\mathbf{bcd})} - \hat{\mathbf{1}}^{(\mathbf{b})} \otimes \hat{\sigma}_z^{(\mathbf{c})} \otimes \hat{\sigma}_z^{(\mathbf{d})} \pm \hat{\sigma}_x^{(\mathbf{b})} \otimes \hat{\sigma}_z^{(\mathbf{c})} \otimes \hat{\mathbf{1}}^{(\mathbf{d})} \\ & \pm \hat{\sigma}_x^{(\mathbf{b})} \otimes \hat{\mathbf{1}}^{(\mathbf{c})} \otimes \hat{\sigma}_z^{(\mathbf{d})} + \hat{\sigma}_z^{(\mathbf{b})} \otimes \hat{\sigma}_x^{(\mathbf{c})} \otimes \hat{\sigma}_x^{(\mathbf{d})} \quad (3.4) \end{aligned}$$

Auch für die Projektionen der Qubits $\mathbf{b} \dots \mathbf{d}$ auf die Zustände $|\pm\rangle$ gibt es *Verschrankungs-Zeugen*, die eine ähnliche Form besitzen.

Qubit i	Projektion auf $ +\rangle_i$ $\hat{\mathcal{W}}_{ \mathcal{C}_3^\circ\rangle_+}$	Projektion auf $ -\rangle_i$ $\hat{\mathcal{W}}_{ \mathcal{C}_3^\circ\rangle_-}$
a	$-0,288 \pm 0,093$	$-0,256 \pm 0,084$
b	$-0,543 \pm 0,091$	$-0,277 \pm 0,087$
c	$-0,276 \pm 0,091$	$-0,304 \pm 0,083$
d	$-0,362 \pm 0,090$	$-0,392 \pm 0,082$

Tabelle 3.2: Nachweis echter 3-Qubit-Verschrankung durch die Erwartungswerte von $\hat{\mathcal{W}}_{|\mathcal{C}_3^\circ\rangle_{\mathbf{bcd}}^\pm}$ an die Zustände $\mathbf{a} \dots \mathbf{d} \langle \pm | \mathcal{C}_4^{exp} \rangle$.

Die Ergebnisse in Tabelle 3.2 zeigen, dass alle möglichen 3-Qubit-Zustände, die wir durch Messungen an den Qubits **a...d** erhalten, echte 3-Teilchen-Verschrankung aufweisen. Die *Fidelity* \mathcal{F} , die sich für die Zustände $|\mathcal{C}_3^{exp}\rangle$ auch aus *Stabilizer*-Operatoren bestimmen lässt (Tabelle 3.3), ergibt zum Beispiel für die beiden Zustände $|\mathcal{C}_3^{exp}\rangle_{\mathbf{abc}}^+$ und $|\mathcal{C}_3^{exp}\rangle_{\mathbf{abc}}^-$ die Werte $\mathcal{F}_{\mathbf{abc}}^+ = 0,756 \pm 0,028$ und $\mathcal{F}_{\mathbf{abc}}^- = 0,753 \pm 0,026$.

k	Stabilizer-Operatoren S_k				Korrelation \mathcal{K}_k für		
					$ \mathcal{C}_3^{exp}\rangle_{\mathbf{bcd}}^+$	$ \mathcal{C}_3^{exp}\rangle_{\mathbf{bcd}}^-$	
1	$\hat{\sigma}_x$	\otimes	$\hat{\sigma}_y$	\otimes	$\hat{\sigma}_y$	$0,741 \pm 0,088$	$0,716 \pm 0,088$
2	$\hat{\sigma}_y$	\otimes	$\hat{\sigma}_x$	\otimes	$\hat{\sigma}_y$	$0,639 \pm 0,098$	$0,617 \pm 0,088$
3	$\hat{\sigma}_y$	\otimes	$\hat{\sigma}_y$	\otimes	$\hat{\sigma}_z$	$0,692 \pm 0,088$	$0,598 \pm 0,086$
4	$\hat{\sigma}_z$	\otimes	$\hat{\sigma}_z$	\otimes	$\hat{\mathbb{1}}$	$0,985 \pm 0,094$	$0,948 \pm 0,081$
5	$\hat{\sigma}_z$	\otimes	$\hat{\mathbb{1}}$	\otimes	$\hat{\sigma}_x$	$0,661 \pm 0,070$	$0,744 \pm 0,059$
6	$\hat{\mathbb{1}}$	\otimes	$\hat{\sigma}_z$	\otimes	$\hat{\sigma}_x$	$0,576 \pm 0,065$	$0,707 \pm 0,061$
7	$\hat{\sigma}_x$	\otimes	$\hat{\sigma}_x$	\otimes	$\hat{\sigma}_z$	$0,751 \pm 0,090$	$0,693 \pm 0,084$
8	$\hat{\mathbb{1}}$	\otimes	$\hat{\mathbb{1}}$	\otimes	$\hat{\mathbb{1}}$	$1 \pm 0,035$	$1 \pm 0,033$
$\mathcal{F} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \mathcal{K}_k =$					$0,756 \pm 0,028$	$0,753 \pm 0,026$	

Tabelle 3.3: Alle 8 Korrelationen \mathcal{K} der *Stabilizer*-Operatoren der 3-Qubit *Cluster-Zustände* $\mathbf{a} \langle \pm | \mathcal{C}_4^{exp} \rangle_{\mathbf{abcd}} = | \mathcal{C}_3^{exp} \rangle_{\mathbf{bcd}}^\pm$.

Eine weitere Eigenschaft des Zustands $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$, die wir schon aus Abschnitt 1.4 kennen, ist die Beständigkeit seiner Verschrankung gegenüber dem Verlust eines Teilchens. Diese Beständigkeit gilt jedoch nicht für den $|GHZ_4\rangle$ -Zustand, der nach einem Teilchenverlust völlig entschränkt ist, wodurch wir einen weiteren Hinweis zur Abgrenzung des $|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle$ gegenüber dem $|GHZ_4\rangle$ erhalten. Nach der Bildung der partiellen Spur über Qubit **a** oder **b** des Zustands $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$ erhalten wir eine Mischung aus

$$|0\rangle \otimes |\phi^+\rangle_{\mathbf{cd}} \quad \text{und} \quad |1\rangle \otimes |\phi^-\rangle_{\mathbf{cd}}.$$

Bilden wir die partielle Spur über die Qubits **c** oder **d**, so bekommen wir eine Mischung aus den Zuständen

$$|\phi^+\rangle_{\mathbf{ab}} \otimes |0\rangle \quad \text{und} \quad |\phi^-\rangle_{\mathbf{ab}} \otimes |1\rangle.$$

Der Nachweis von 2-Teilchen-Verschrankung für beide Zustände erfolgt über die folgenden beiden *Verschrankungs-Zeugen*, die mit *Stabilizer*-Operatoren dargestellt werden können [39]:

$$\hat{\mathcal{W}}_{\mathbf{a/b}} = \hat{\mathbb{1}}^{(\otimes 3)} - \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \quad \text{und} \quad (3.5)$$

$$\hat{\mathcal{W}}_{\mathbf{c/d}} = \hat{\mathbb{1}}^{(\otimes 3)} - \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}} - \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z \quad (3.6)$$

Qubit i	Erwartungswert von $\hat{W}_{\mathbf{a}/\mathbf{b}}$ bzw. $\hat{W}_{\mathbf{c}/\mathbf{d}}$
a	$-0,570 \pm 0,057$
b	$-0,639 \pm 0,058$
c	$-0,609 \pm 0,058$
d	$-0,648 \pm 0,057$

Tabelle 3.4: Nachweis von Verschränkung durch die Erwartungswerte von $\hat{W}_{\mathbf{a}/\mathbf{b}}$ bzw. $\hat{W}_{\mathbf{c}/\mathbf{d}}$ nach Bildung der partiellen Spur über Qubit i.

Die Erwartungswerte sind in Tabelle 3.4 angegeben. Sie zeigen die Verschränkung der Rest-Zustände und bestätigen damit, dass sich der präparierte Zustand vom $|GHZ_4\rangle$ in seinen Verschränkungseigenschaften unterscheidet.

3.3 Der 2-Qubit Cluster-Zustand

Aus Kapitel 1.4 wissen wir, dass alle *Cluster-Zustände* eine maximale *Connectedness* besitzen (vgl. Seite 27). Das sehen wir daran, dass wir durch eine Messung in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis aus dem Zustand $|\mathcal{C}_n\rangle$ den *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_{n-1}\rangle$ erhalten. Auf diese Weise gelangen wir nach $n - 2$ Messungen zum Zustand $|\mathcal{C}_2\rangle$, der äquivalent zu den BELL-Zuständen ist.

Für den transformierten Zustand $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$ gilt diese Eigenschaft in gleichem Maße, allerdings ergeben sich wegen der angewandten *Hadamard-Transformation* auf die Qubits **a** und **d** des $|\mathcal{C}_4\rangle$ einige Veränderungen bezüglich der Basen, in denen die Messungen stattfinden müssen. Das bedeutet in unserem Fall, dass wir beispielsweise durch zwei Messungen an den Qubits **b** und **c** in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis den $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$ auf einen zu $|\mathcal{C}_2^\circ\rangle$ äquivalenten Zustand projizieren können:

$$|\mathcal{C}_4^\circ\rangle \xrightarrow{\mathbf{b}\langle\hat{\sigma}_x|} \xrightarrow{\mathbf{c}\langle\hat{\sigma}_x|} |\mathcal{C}_2^\circ\rangle$$

Wir wollen diese Eigenschaft nun auch experimentell bestätigen. Dabei bestimmen wir durch eine Zustandstomographie die Dichtematrizen der Zustände ${}_{\mathbf{bc}}\langle\pm\pm|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle_{\mathbf{abcd}}$, die in Tabelle 3.5 dargestellt sind. Die zugehörigen *Fidelities* \mathcal{F} sind in Tabelle 3.6 angegeben.

Zusammenfassend konnten wir für unseren präparierten Zustand $|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle$ echte 4-Qubit-Verschränkung zeigen, mit einer *Fidelity* von $\mathcal{F} = 74,1\%$ an den idealen Zustand $|\mathcal{C}_4^\circ\rangle$. Es war außerdem möglich, eine BELL-Ungleichung mit etwa sechs Standardabweichungen über der klassischen Grenze zu verletzen und damit gleichzeitig eine Abgrenzung gegenüber einem GHZ_4 -Zustand

3.3. DER 2-QUBIT-ZUSTAND Charakterisierung des Cluster-Zustands

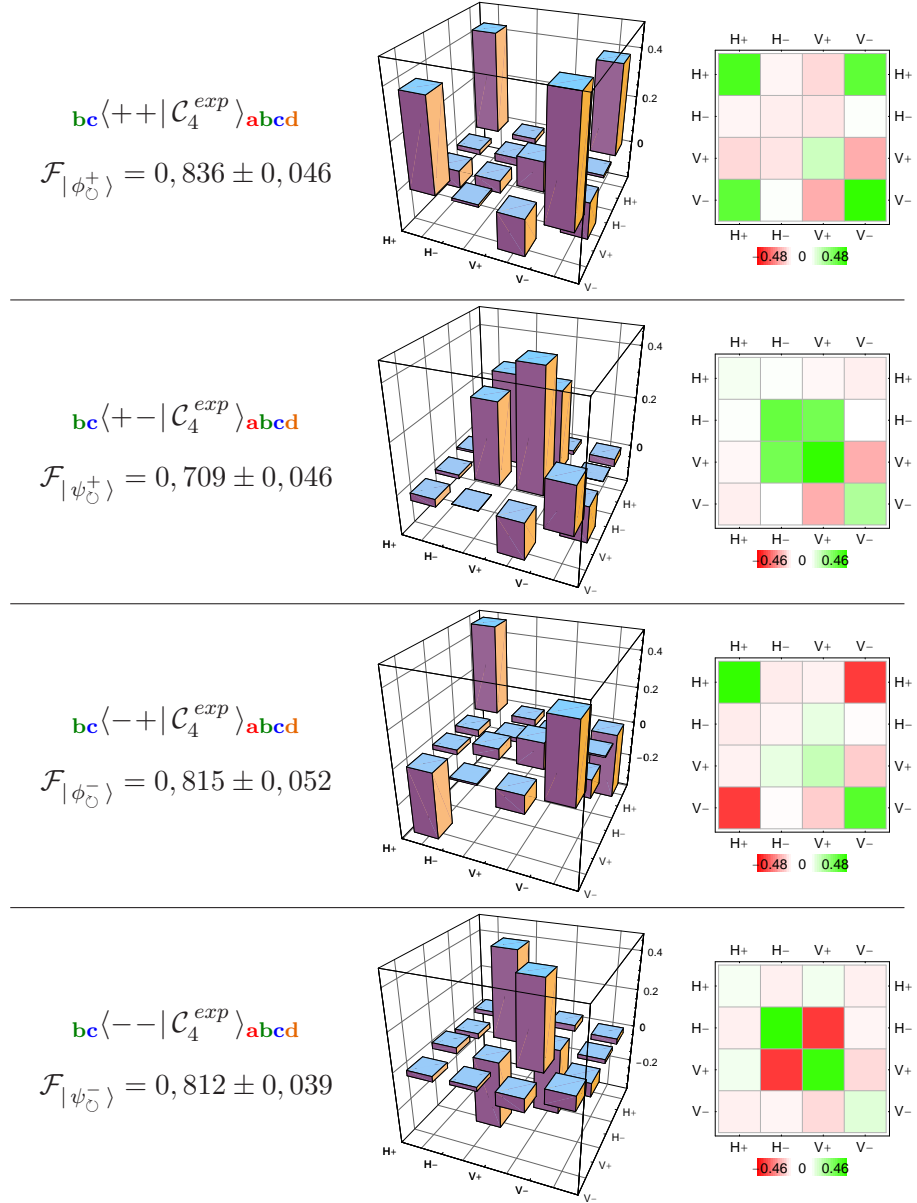


Tabelle 3.5: Experimentell bestimmte Dichtematrizen in der $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x$ -Basis für die Zustände $\text{bc}\langle \pm\pm | \mathcal{C}_4^{exp} \rangle_{abcd}$ mit jeweiliger *Fidelity* an den theoretischen Zustand.

zu erreichen. Wir konnten zudem Verschränkungs-Eigenschaften des $|\mathcal{C}_4^{\odot}\rangle$, wie die maximale *Connectedness* und die Resistenz der Verschränkung gegenüber dem Verlust eines Teilchens, auch an dem von uns präparierten Zustand $|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle$ nachweisen.

erwartete Zustände	gemessene <i>Fidelity</i> \mathcal{F}
$\mathbf{bc}\langle ++ \mathcal{C}_4^{exp} \rangle_{\mathbf{abcd}} \rightarrow H+\rangle_{\mathbf{ad}} + V-\rangle_{\mathbf{ad}}$	$0,836 \pm 0,046$
$\mathbf{bc}\langle +- \mathcal{C}_4^{exp} \rangle_{\mathbf{abcd}} \rightarrow H-\rangle_{\mathbf{ad}} + V+\rangle_{\mathbf{ad}}$	$0,709 \pm 0,046$
$\mathbf{bc}\langle -+ \mathcal{C}_4^{exp} \rangle_{\mathbf{abcd}} \rightarrow H+\rangle_{\mathbf{ad}} - V-\rangle_{\mathbf{ad}}$	$0,815 \pm 0,052$
$\mathbf{bc}\langle -- \mathcal{C}_4^{exp} \rangle_{\mathbf{abcd}} \rightarrow H-\rangle_{\mathbf{ad}} - V+\rangle_{\mathbf{ad}}$	$0,812 \pm 0,039$

Tabelle 3.6: *Fidelity* \mathcal{F} der experimentellen Zustände an die jeweiligen theoretischen Zustände bei Messung der Qubits \mathbf{b} und \mathbf{c} in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis.

Alle diese Ergebnisse bestätigen nicht nur die Qualität des präparierten *Cluster-Zustands* $|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle$, sondern auch die Funktionsfähigkeit des kontrollierten Phasengatters, das wegen seiner vielseitigen Einsatzmöglichkeiten, zum Beispiel als BELL-Zustands-Analysator, auch Anwendung in anderen Experimenten findet.

Kapitel 4

Ausblick

Es existiert eine große Zahl von weiterführenden Experimenten, sowohl für das Phasengatter als auch für den Cluster-Zustand. Beispielsweise kann der Cluster-Zustand als „Einweg-Quantencomputer“ verwendet werden [3], was auch schon experimentell mit dem 4-Qubit Cluster-Zustand gezeigt worden ist [28]. Dieses Themengebiet würde aber über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen.

Darum werden wir uns in einem kurzen Ausblick mit zwei interessanten Experimenten beschäftigen, welche die Möglichkeiten nutzen, die durch das Phasengatter geboten werden.

Quanten-Teleportation

Ein interessantes Experiment ist die *Teleportation* [41, 42, 43] eines beliebigen 1-Qubit-Zustands $|\tau\rangle_{\mathbf{c}}$. Dabei wird der Zustand eines Photons auf ein anderes übertragen, wobei sich dazu beide nicht am gleichen Ort befinden müssen und deshalb auch nicht miteinander wechselwirken können. Mit unserem Phasengatter ist es nun erstmals gelungen, eine *Teleportation* mit einer *vollständigen* BELL-Zustands-Analyse durchzuführen. Auf welche Weise wir das erreichen, wollen wir kurz beschreiben.

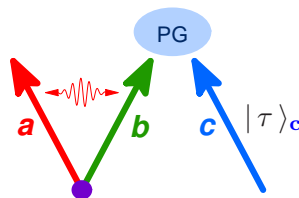


Abbildung 4.1: Präparation des Photons \mathbf{c} im Zustand $|\tau\rangle_{\mathbf{c}}$.

Wir erzeugen zunächst ein EPR-Paar (\mathbf{a}, \mathbf{b}) im Zustand $|\phi^+\rangle$ und präparieren das Photon \mathbf{c} in einem beliebigen Zustand $|\tau\rangle_{\mathbf{c}}$ (Abbildung 4.1).

Indem wir nun die Photonen \mathbf{b} und \mathbf{c} im Phasengatter $\hat{P}\hat{G}$ zur Interferenz bringen und anschließend hinter dem Phasengatter eine Polarisationsanalyse in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis durchführen, werden die Photonen \mathbf{b} und \mathbf{c} auf die Zustände $\hat{P}\hat{G}|\pm\pm\rangle_{\mathbf{bc}}$ projiziert (Abbildung 4.2), die äquivalent zu den BELL-Zuständen sind:

$$\begin{aligned}\hat{P}\hat{G}|++\rangle_{\mathbf{bc}} &= |H+\rangle_{\mathbf{bc}} + |V-\rangle_{\mathbf{bc}} = |\phi_{\odot}^+\rangle_{\mathbf{bc}} \\ \hat{P}\hat{G}|+-\rangle_{\mathbf{bc}} &= |H-\rangle_{\mathbf{bc}} + |V+\rangle_{\mathbf{bc}} = |\psi_{\odot}^+\rangle_{\mathbf{bc}} \\ \hat{P}\hat{G}|--\rangle_{\mathbf{bc}} &= |H+\rangle_{\mathbf{bc}} - |V-\rangle_{\mathbf{bc}} = |\phi_{\ominus}^-\rangle_{\mathbf{bc}} \\ \hat{P}\hat{G}|+-\rangle_{\mathbf{bc}} &= |H-\rangle_{\mathbf{bc}} - |V+\rangle_{\mathbf{bc}} = |\psi_{\ominus}^-\rangle_{\mathbf{bc}}\end{aligned}\quad (4.1)$$

Dabei wird der Zustand $|\tau\rangle$ auf das Photon \mathbf{a} übertragen. Genauer gesagt ist dann der Zustand $|\tau\rangle_{\mathbf{a}}$ unter lokalen unitären Transformationen äquivalent zum Eingangszustand $|\tau\rangle_{\mathbf{c}}$, wobei diese Transformationen nicht vom Zustand $|\tau\rangle$ abhängen, sondern nur vom zufälligen Ergebnis der BELL-Messung an \mathbf{b} und \mathbf{c} (Abbildung 4.3).

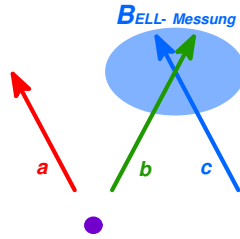


Abbildung 4.2: Projektion der Photonen \mathbf{b} und \mathbf{c} auf einen BELL-Zustand.

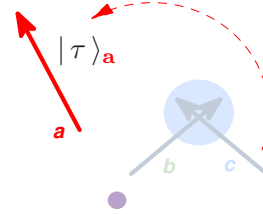


Abbildung 4.3: Durch die Messung an \mathbf{b} und \mathbf{c} wird der Zustand $|\tau\rangle$ auf das Photon \mathbf{a} übertragen.

Für den speziellen Fall unseres Phasengatters erhalten wir bei der *Teleportation* folgende Zustände:

$$|\tau\rangle_{\mathbf{c}} = \alpha |H\rangle_{\mathbf{c}} + \beta |V\rangle_{\mathbf{c}} \longrightarrow \begin{cases} |\phi_{\odot}^+\rangle_{\mathbf{bc}} & \alpha |+\rangle_{\mathbf{a}} + \beta |-\rangle_{\mathbf{a}} \\ |\psi_{\odot}^+\rangle_{\mathbf{bc}} & \alpha |+\rangle_{\mathbf{a}} - \beta |-\rangle_{\mathbf{a}} \\ |\phi_{\ominus}^-\rangle_{\mathbf{bc}} & \alpha |-\rangle_{\mathbf{a}} + \beta |+\rangle_{\mathbf{a}} \\ |\psi_{\ominus}^-\rangle_{\mathbf{bc}} & \alpha |-\rangle_{\mathbf{a}} - \beta |+\rangle_{\mathbf{a}} \end{cases}$$

Eine interessante Möglichkeit, die Qualität der *Teleportation* zu bestimmen, ist über eine 1-Qubit Prozesstomographie gegeben [41]. Dazu müssen

wir lediglich vier Eingangszustände, wie zum Beispiel $|H\rangle_{\mathbf{c}}$, $|V\rangle_{\mathbf{c}}$, $|+\rangle_{\mathbf{c}}$ und $|R\rangle_{\mathbf{c}}$, präparieren und jeweils eine Zustandstomographie des teleportierten Zustands am Qubit \mathbf{a} durchführen. Im idealen Fall erhalten wir eine 4×4 Prozesstomographie-Matrix χ_{ml} , die der Transformation

$$\hat{Q}(\hat{\rho}) = \hat{\mathbb{1}} \hat{\rho} \hat{\mathbb{1}}$$

entspricht, welche die Identität darstellt.

Verschränkungstransfer

Eine weitere, schon realisierte Anwendung des Phasengatters [41] benutzt ebenfalls seine Eigenschaft, eine *vollständige* BELL-Zustands Analyse durchführen zu können. Der Ausgangspunkt für dieses Experiment ist die Frage, ob es möglich ist, analog zum *Teleportations*-Experiment auch den Zustand eines verschränkten Teilchens zu teleportieren. In der Tat ist eine derartige *Teleportation*, die die Verschränkungseigenschaften mit einschließt, möglich und wird mit *Verschränkungstransfer* bezeichnet [44, 45, 46]. Durch die Anwendung des Phasengatters wurde erstmals ein *Verschränkungstransfer* mit vollständiger BELL-Zustands-Analyse durchgeführt. Das Prinzip des Experiments ist folgendes:

Wir erzeugen zwei unabhängige EPR-Paare (\mathbf{a}, \mathbf{b}) und (\mathbf{c}, \mathbf{d}) , wie es in Abbildung 4.4 zu sehen ist.

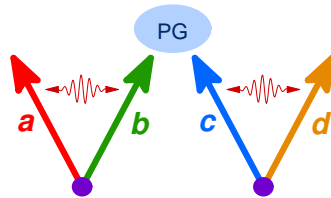


Abbildung 4.4: Erzeugung zweier unabhängiger EPR-Paare.

Bringen wir nun die beiden unabhängigen Photonen \mathbf{b} und \mathbf{c} im Phasengatter ($\hat{P}\hat{G}$) zur Interferenz und führen anschließend eine Messung in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis durch (Abbildung 4.5), so projizieren wir beide Photonen auf einen BELL-Zustand (vgl. Gleichung (4.1)). Dadurch gehen die beiden Photonen \mathbf{a} und \mathbf{d} in einen verschränkten Zustand über (Abbildung 4.6). Im Bild der *Teleportation* könnte man auch sagen, dass sich die Verschränkung von Photon \mathbf{c} mit \mathbf{d} bei der BELL-Messung auf das Photon \mathbf{a} überträgt.

Nehmen wir den konkreten Fall an, dass wir anfangs die Paare (\mathbf{a}, \mathbf{b}) und (\mathbf{c}, \mathbf{d}) im Zustand $|\phi^+\rangle = |HH\rangle + |VV\rangle$ präpariert haben, so erhalten wir nach der Messung an den Photonen \mathbf{b} und \mathbf{c} , abhängig vom zufälligen Messergebnis, ein verschränktes Photonen-Paar (\mathbf{a}, \mathbf{d}) im Zustand:

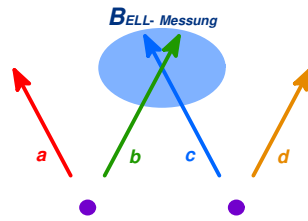


Abbildung 4.5: Projektion der unabhängigen Photonen **b** und **c** auf einen BELL-Zustand.

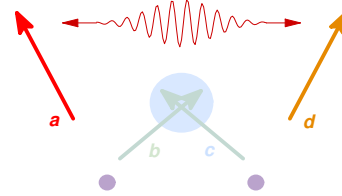


Abbildung 4.6: Nach einer Messung an **b** und **c** sind die beiden Photonen **a** und **d** in einem verschränkten Zustand.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{bc} \langle \phi_0^+ | \phi^+ \otimes \phi^+ \rangle_{\mathbf{abcd}} &= |\phi_0^+ \rangle_{\mathbf{ad}} \\
 \mathbf{bc} \langle \psi_0^+ | \phi^+ \otimes \phi^+ \rangle_{\mathbf{abcd}} &= |\psi_0^+ \rangle_{\mathbf{ad}} \\
 \mathbf{bc} \langle \phi_0^- | \phi^+ \otimes \phi^+ \rangle_{\mathbf{abcd}} &= |\phi_0^- \rangle_{\mathbf{ad}} \\
 \mathbf{bc} \langle \psi_0^- | \phi^+ \otimes \phi^+ \rangle_{\mathbf{abcd}} &= |\psi_0^- \rangle_{\mathbf{ad}}
 \end{aligned}$$

Ausgehend von diesem Experiment gibt es weitere sehr interessante Fragestellungen, die sich beispielsweise damit beschäftigen, was wir beobachten, wenn wir die Photonen **a** und **d** erst „im Nachhinein“, also nach deren Detektion, durch eine verzögerte Messung an den Photonen **b** und **c** miteinander verschränken [46].

Kapitel 5

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit gelang es uns nachzuweisen, dass es mit linearer Optik möglich ist, ein kontrolliertes Phasengatter zu realisieren und mit diesem den *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_4^\odot\rangle = |0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle$ in einem 4-Photonen-Experiment mit gepulster spontaner parametrischer Fluoreszenz vom typ-II zu erzeugen.

Wir analysierten eingehend Aufbau, Justage und Funktionsweise des von uns entwickelten Phasengatters zusammen mit deren wechselseitiger Abhängigkeit, beispielsweise für Abweichungen der realen Komponenten von ihren, durch die Theorie geforderten Parametern. Dabei konnten wir zeigen, dass es mit dem Phasengatter möglich ist, eine *vollständige BELL-Zustands-Analyse* durchzuführen.

Um die Qualität des Phasengatters zu charakterisieren, führten wir eine Prozesstomographie durch. Mit dieser Methode der Beschreibung von Quantengattern waren wir in der Lage, detaillierte Informationen über die reale Gatter-Transformation zu erlangen und anhand dieser Informationen eine computergestützte Simulation der Gatter-Operation auf ein repräsentatives Ensemble von Zuständen anzuwenden und zu analysieren. Es gelang uns, aus der Prozesstomographie eine mittlere *Gatter-Fidelity* von $\overline{\mathcal{F}}_G = 0,854$ abzuleiten, die es uns ermöglichte den 4-Qubit-verschränkten Zustand $|\mathcal{C}_4^\odot\rangle$ zu erzeugen. Dieser Zustand gehört der interessanten Klasse der *Cluster-Zustände* an, die sich vor allem für den von BRIEGEL und RAUSSENDORF vorgeschlagenen „Einweg-Quantencomputer“ [3] eignen.

Aufgrund der besonderen Struktur des Cluster-Zustands konnten wir eine einfache Methode einführen, mit der sich die *Fidelity* des $|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle$ von $\mathcal{F} = 0,741$ direkt aus den Korrelationen der 16 *Stabilizer*-Operatoren bestimmen lässt, wodurch wir eine zeitintensive vollständige Zustandstomographie umgehen. Es gelang uns zudem echte 4-Qubit-Verschränkung mit einem *Verschränkungs-Zeugen* \hat{W} nachzuweisen.

Wir waren ebenfalls in der Lage mehrere Verschränkungs-Eigenschaften des idealen *Cluster-Zustands* am $|\mathcal{C}_4^{exp}\rangle$ zu überprüfen, wie beispielsweise

die maximale *Connectedness* und die Beständigkeit der Verschränkung bei einem Teilchenverlust, wodurch er sich vom GHZ-Zustand unterscheidet.

Zusammenfassend eröffnen sich durch den *Cluster-Zustand* $|\mathcal{C}_4^\odot\rangle$ und das Phasengatter viele neue Möglichkeiten und Perspektiven für weitergehende Projekte von denen mittlerweile schon einige realisiert worden sind, aber sicherlich noch weitere folgen werden.

Literaturverzeichnis

- [1] J.S. Bell.
On the einstein-podolsky-rosen paradoxon.
Physics 1: 195, (1964).
- [2] A.K. Ekert, B. Huttner, G.M. Palma und A. Peres.
Eavesdropping on quantum-cryptographical systems.
Phys. Rev. A, **50**, 1047-1056, (1994).
- [3] R. Raussendorf, Daniel E. Browne und H.J. Briegel.
Measurement-based quantum computation on cluster states.
quant-ph/0301052, (2003).
- [4] C. Kurtsiefer, M. Oberparleiter und H. Weinfurter.
High-efficiency entangled photon pair collection in type-ii parametric fluorescence.
Phys. Rev. A, **64**, 023802, (2001).
- [5] M.A. Nielsen und I.L. Chuang.
Quantum computation and quantum information.
Cambridge University Press, (2000).
- [6] H.J. Briegel und R. Raussendorf.
Persistent entanglement in arrays of interacting particles.
Phys. Rev. Lett., **86**, 910, (2000).
- [7] A. Aspect, J. Dalibard und G. Roger.
Experimental tests of realistic local theories via bell's theorem.
Phys. Rev. Lett., **47**, 460-463 (1981).
- [8] N. Gisin.
Bell's inequality holds for all non-product states.
Phys. Lett. A, **154**, 201, (1991).
- [9] M. Zukowski und Č. Brukner.
Bell's theorem for general n-qubit states.
quant-ph/0102039, (2001).

- [10] B.M. Terhal.
Bell inequalities and the separability criterion.
Phys. Lett. A, **271**, 319-326 (2000).
- [11] A. Peres.
Separability criterion for density matrices.
Phys. Rev. Lett., **77(8)**,14131415, (1996).
- [12] M. Horodecki, P. Horodecki und R. Horodecki.
Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions.
Phys. Lett. A, **223(1)**, (1996).
- [13] M. Horodecki, P. Horodecki und R. Horodecki.
Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions.
quant-ph/9605038, (1996).
- [14] M. Lewenstein, D. Bruß, J.I. Cirac, B. Kraus, M. Kus, J. Samsonowicz,
A. Sanpera und R. Tarrach.
separability and distillability in composite quantum systems - a primer -.
quant-ph/0006064, (2000).
- [15] M.A. Nielsen und J. Kempe.
Separable states are more disordered globally than locally.
quant-ph/0011117, (2000).
- [16] M. Lewenstein, B. Kraus, P. Horodecki und J.I. Cirac.
Characterization of separable states and entanglement witnesses.
quant-ph/0005112, (2000).
- [17] M. Lewenstein, B. Kraus, J.I. Cirac und P. Horodecki.
Optimization of entanglement witnesses.
quant-ph/0005014, (2000).
- [18] M. Bourennane, M. Eibl, C. Kurtsiefer, S. Gaertner, H. Weinfurter, O.
Guehne, P. Hyllus, D. Bruss, M. Lewenstein, A. Sanpera.
Experimental detection of multipartite entanglement using witness operators.
quant-ph/0309043, (2004).
- [19] M. Bourennane, M. Eibl, C. Kurtsiefer, S. Gaertner, H. Weinfurter, O.
Guehne, P. Hyllus, D. Bruss, M. Lewenstein, A. Sanpera.
Experimental detection of multipartite entanglement using witness operators.
Phys. Rev. Lett, **92**.087902, (2004).
- [20] A. Otte.
Separabilität in quantennetzwerken.

- Dissertation, Institut für Theoretische Physik 1, Universität Stuttgart, (2001).
- [21] M. Bourennane, M. Eibl, N. Kiesel, S. Gaertner, C. Kurtsiefer, H. Weinfurter.
Entanglement robustness of multi-photon entangled states.
(to be published).
- [22] D. Bruß.
Characterizing entanglement.
quant-ph/0110078, (2001).
- [23] W. Dür, G. Vidal, J.I. Cirac.
Three qubits can be entangled in two inequivalent ways.
Phys. Rev. A, **62**, 062314, (2000).
- [24] Daniel F. V. James, Paul G. Kwiat, William J. Munro, and Andrew G. White.
Measurement of qubits.
Phys. Rev. A, **64**, 052312 (2001).
- [25] A. Gilchrist, N.K. Langford und M.A. Nielsen.
Distance measures to compare real and ideal quantum processes.
quant-ph/0408063, (2004).
- [26] G. Tóth and O. Gühne.
Two measurement settings can suffice to verify multipartite entanglement.
quant-ph/0409132 v1, (2004).
- [27] Ch. Kurtsiefer, M. Oberparleiter, H. Weinfurter.
High efficiency entangled photon pair collection in type ii parametric fluorescence.
Phys. Rev. A, **64**, 023802 (2001).
- [28] P. Walther, K.J. Resch, T. Rudolph, E. Schenck, H. Weinfurter, V. Vedral, M. Aspelmeyer und A. Zeilinger.
Experimental one-way quantum computing.
nature, **03347**, (2005).
- [29] A.N. Zhang, C.Y. Lu, X.Q. Zhou, Y.A. Chen, Z. Zhao, T. Yang und J.W. Pan.
Experimental construction of optical multi-qubit cluster states from bell states.
quant-ph/0501036, (2005).

- [30] Y.H. Shih, A.V. Sergienko, M.H. Rubin, T.E. Kiess und C.O. Alley.
Two-photon entanglement in type-II parametric down-conversion.
Phys. Rev. A, **50**, 1, (1994).
- [31] T.C. Ralph, N.K. Langford, T.S. Bell und A.G. White.
Linear optical controlled-not gate in the coincidence basis.
Phys. Rev. A, **65**, 062324, (2002).
- [32] W.P. Grice und I.A. Walmsley.
Spectral information and distinguishability in type-II down-conversion with a broadband pump.
Phys. Rev. A, **56** 2, (1997).
- [33] W.P. Grice, R. Erdmann und I.A. Walmsley.
Spectral distinguishability in ultrafast parametric down-conversion.
Phys. Rev. A, **57** 4, (1998).
- [34] R. Erdmann, D. Branning, W.P. Grice und I.A. Walmsley.
Restoring dispersion cancellation for entangled photons produced by ultrashort pulses.
Phys. Rev. A, **62** 053810, (2000).
- [35] F. Schwabl.
Quantenmechanik.
Springer-Verlag, (1988).
- [36] C.K. Hong, Z.Y. Ou und L. Mandel.
Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference.
Phys. Rev. Lett., **59**, (1987).
- [37] K.T. Fang, S. Kotz und K.W. Ng.
Symmetric Multivariate and Related Distributions.
Chapman and Hall, London, (1990).
- [38] N. Kiesel, C. Schmid, U. Weber, G. Toth, R. Ursin und H. Weinfurter.
Experimental analysis of a 4-qubit cluster state.
Phys. Rev. Lett., to be published.
- [39] G. Tóth und O. Gühne.
Detecting genuine multipartite entanglement with two local measurements.
Phys. Rev. Lett., **94**, 060501, (2005).
- [40] V. Scarani, A. Acin, E. Schenck, M. Aspelmeyer.
The non-locality of cluster states.
quant-ph/0405119, (2004).

- [41] N. Kiesel, C. Schmid, U. Weber, H. Weinfurter und R. Ursin.
Teleportation and entanglement swapping including a complete bell state analysis performed by a controlled phasegate.
Phys. Rev. Lett., to be published.
- [42] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres und W.K. Wootters.
Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels.
Phys. Rev. Lett., **70**, 1895, (1993).
- [43] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter und A. Zeilinger.
Experimental quantum teleportation.
Nature, **390**, 575, (1997).
- [44] M. Zukowski, A. Zeilinger, M.A. Horne und A.K. Ekert.
“event-ready-detectors” bell experiment via entanglement swapping.
Phys. Rev. Lett., **71**, 4287, (1993).
- [45] J.-W. Pan, D. Bouwmeester, H. Weinfurter und A. Zeilinger.
Experimental entanglement swapping: entangling photons that never interacted.
Phys. Rev. Lett., **80**, 3891, (1998).
- [46] C. Brukner, M. Aspelmeyer und A. Zeilinger.
Complementarity and information in “delayed-choice for entanglement swapping”.
quant-ph/0405036, (2004).

Abbildungsverzeichnis

1.1	Unterschiedliche Arten der Verschränkung für Systeme von drei Qubits.	12
1.2	Geometrische Interpretation des <i>Verschränkungs-Zeugen</i> $\hat{W}_{\hat{v}}$ als Hyperebene, die den konvexen Raum der separablen Zustände vom verschränkten Zustand \hat{v} trennt.	13
1.3	Die Prozesstomographie-Matrix χ_{ml} für das Phasen-Gatter.	22
1.4	Ein Beispiel eines zweidimensionalen Clusters \mathcal{G}	25
2.1	Gesamter Versuchsaufbau zur Erzeugung des $ \mathcal{C}_4^{\odot}\rangle$	34
2.2	Frequenzverdoppelter Ti:Sa-Laser mit Wellenlänge $\lambda = 390nm$ und mittlerer Leistung $P = 700mW$	35
2.3	Energieerhaltung bei der spontanen parametrischen Fluoreszenz.	36
2.4	Emissionskegel für ordentliche und außerordentliche bzw. $ V\rangle$ - und $ H\rangle$ -polarisierte Photonen mit Schnittgeraden a und b	36
2.5	Erzeugung eines zweiten EPR-Paares durch Reflexion des Pump-lasers mit Hilfe eines UV-Spiegels.	37
2.6	Photographie der Quelle, mit der zwei verschränkte Photonen-Paare im Zustand $ \phi^+\rangle$ erzeugt werden.	39
2.7	Der Strahlteiler \mathcal{ST}	40
2.8	Der polarisationsabhängige Strahlteiler \mathcal{PST}	41
2.9	Schematischer Aufbau des Phasengatters mit Polarisations-analyse.	43
2.10	Photographie des realen Phasengatters	44
2.11	<i>Prozess-Fidelity</i> F_P in Abhängigkeit von der HOM-Dip <i>Visi-bility</i> V	46
2.12	<i>Prozess-Fidelity</i> F_P in Abhängigkeit von T_V für den Strahl-teiler \mathcal{PST}	48
2.13	<i>Prozess-Fidelity</i> F_P in Abhängigkeit von T_H^P des Strahlteiler-Plättchens.	48
2.14	Koordinatensystem für die Justage des Strahlteilers \mathcal{PST}	49

2.15	Transmission und Reflexion in Abhängigkeit von einer Rotation des \mathcal{PST} um die Z-Achse für die beiden Eingangsmoden b und c	50
2.16	Verhältnis von Reflexion und Transmission R_V/T_V des \mathcal{PST} in Abhängigkeit von der Drehung um die vertikale Z-Achse.	51
2.17	Koordinatensystem für die Justage des Strahlteiler-Plättchens $\mathcal{PSTP}_{1/2}$	52
2.18	Justage der Strahlteiler-Plättchen $\mathcal{PSTP}_{1/2}$ durch Minimierung des Anteils orthogonaler Polarisation	53
2.19	Verhältnis T_H^P/T_V^P der Strahlteiler-Plättchen $\mathcal{PSTP}_{1/2}$ in Abhängigkeit von der Verkippung um die Y-Achse.	53
2.20	Parallele Ausrichtung des Faserkopplers Z zur Bewegungsrichtung des Verschiebetisches mit Hilfe eines zweiten Faserkopplers k	55
2.21	Kopplungsstärke von Faserkoppler Z nach k über den gesamten Fahrbereich (0-23mm) des Verschiebetisches.	55
2.22	Einstellen des Überlappstrahlteilers \mathcal{PST} auf ein T_V/T_H -Verhältnis von $\frac{1}{3}$ durch Rotation um die vertikale Achse.	56
2.23	Platzierung von Koppler X , der durch die Position des Überlappstrahlteilers festgelegt ist.	56
2.24	Interferenzmuster für unterschiedliche Abweichungen in der Strahlrichtung	57
2.25	Feinjustage von Koppler X durch Beobachtung eines Interferenzmusters.	57
2.26	Justage der Strahlteiler-Plättchen $\mathcal{PSTP}_{1/2}$ durch Drehung um die horizontale und vertikale Achse.	58
2.27	Die <i>Prozess-Fidelity</i> F_P in Abhängigkeit von T_V des \mathcal{PST} für zwei unterschiedliche Justagemethoden.	59
2.28	Reflexion der Photonen aus Mode a durch den BBO-Kristall hindurch nach Mode c	60
2.29	Justage der Interferenz am \mathcal{PST} mit nur einer Quelle.	60
2.30	Strahlverlauf zweier Quellen zur Erzeugung des $ \mathcal{C}_4^\circ\rangle$	60
2.31	Schematischer Verlauf der $ VV\rangle$ -Koinzidenzen als Funktion der Verschiebetisch-Position.	61
2.32	Experimentell bestimmter $ VV\rangle$ -Dip mit $V = 0,715$	63
2.33	Schematische Darstellung des Koinzidenz-Untergrundes für $ VV\rangle$ -Koinzidenzen von zwei unabhängigen Quellen.	63
2.34	$ VV\rangle$ -Dip zwischen unabhängigen Quellen mit einer <i>Visibility</i> von $V = 0,25 = 0,814V_{max}$	64
2.35	$ VV--\rangle$ -Dip mit einer <i>Visibility</i> von $V = 0,81$	64
2.36	Dichtematrix $\hat{\rho}$ des Phasengatter-Eingangszustands $ V+\rangle$	65
2.37	Dichtematrix $\hat{\rho}^{[ideal]}$ des idealen Phasengatter-Ausgangszustands $ V-\rangle = \hat{P}\hat{G} V+\rangle$	65

2.38	Realteil der experimentell ermittelten Ausgangs-Dichtematrix $\hat{\rho}^{[exp]}$ für das Phasengatter.	65
2.39	Prozesstomographie-Matrix $\chi_{ml}^{[ideal]}$ eines perfekten Phasengatters.	67
2.40	Realteil der gemessenen Prozesstomographie-Matrix $\chi_{ml}^{[exp]}$	67
2.41	Prozesstomographie-Matrizen $\chi_{ml}^{[V]}$ für ein theoretisches Modell des nicht-perfekten Phasengatters mit Transformation $\hat{Q}_{[V]}(\hat{\rho})$ und verschiedenen HOM-Dip <i>Visibilities</i> V	69
2.42	Charakteristische Unterschiede der Prozesstomographie-Matrizen für verschiedene Störfaktoren auf das Phasengatter-Modell	70
2.43	Realteil der Differenz $\Delta\chi_{ml}$ zwischen der gemessenen Prozesstomographie-Matrix $\chi_{ml}^{[exp]}$ und einer mit $\hat{Q}_{[V]}(\hat{\rho})$ bestimmten Modell-Matrix $\chi_{ml}^{[V=0,9]}$ für $V = 0.9$	71
2.44	Bestimmung der <i>Visibility</i> V mit der größten Übereinstimmung zwischen $\chi_{ml}^{[V]}$ und der experimentellen Matrix $\chi_{ml}^{[exp]}$	71
2.45	Darstellung von $\chi_{ml}^{[exp]}$ in der Phasengatter-Basis.	72
2.46	Charakteristika von \hat{Q} bei Anwendung der Gatter-Transformation \hat{Q} auf eine sehr große Zahl von Eingangszuständen.	73
2.47	Rotationsinvariante zweidimensionale Standardnormalverteilung.	74
2.48	Zusammenhang zwischen der <i>Gatter-Fidelity</i> \mathcal{F}_G und der <i>linearen Entropie</i> S_{lin} für eine Simulation des experimentellen Phasengatters.	75
2.49	Verteilung der <i>Gatter-Fidelity</i> \mathcal{F}_G für eine Simulation des experimentellen Phasengatters mit $\sim 50\,000$ Eingangszuständen.	76
2.50	<i>Fidelity</i> -Verteilung des Phasengatter-Modells $\hat{Q}_{[V=0,9]}(\hat{\rho})$ mit $\sim 50\,000$ Eingangszuständen.	78
3.1	Verlauf der gemessenen Intensitäten in zwei Detektoren der gleichen Mode in Abhängigkeit vom Winkel α der Eingangspolarisation.	82
3.2	Zählraten für 4-fach-Koinzidenzen bei einer Messung am $ \mathcal{C}_4^{exp}\rangle$ in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis.	83
3.3	Der <i>Cluster-Zustand</i> $ \mathcal{C}_4^{exp}\rangle$ in der $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x$ - bzw. $\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$ -Basis.	85
3.4	Die theoretischen Zählraten eines Phasengatter-Modells mit HOM-Dip <i>Visibility</i> $V = 0,81$	86
3.5	Zählraten der beiden GHZ-Zustände für die Projektion von $ \mathcal{C}_4^{exp}\rangle$ auf $ +\rangle$ bzw. $ -\rangle$ in der $\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$ -Basis.	89
4.1	Präparation des Photons c im Zustand $ \tau\rangle_{\mathbf{c}}$	95
4.2	Projektion der Photonen b und c auf einen BELL-Zustand.	96
4.3	Teleportation des Zustands $ \tau\rangle_{\mathbf{c}}$ auf das Photon a	96

4.4	Erzeugung zweier unabhängiger EPR-Paare.	97
4.5	Projektion der unabhängigen Photonen b und c auf einen BELL-Zustand.	98
4.6	Verschränkungs-Transfer durch eine BELL-Messung an den Photonen b und c	98

Tabellenverzeichnis

1.1	Transformation des CNOT-Gatters.	15
1.2	Anzahl der freien Parameter $\mathcal{N}_{Parameter}$ zur Beschreibung eines n-Qubit-Gatters.	19
1.3	Beispiele einiger <i>Cluster-Zustände</i> $ \mathcal{C}_n\rangle$	27
1.4	Ergebnisse einer Messung bzw. mehrerer Messungen am transformierten <i>Cluster-Zustand</i> $ \mathcal{C}_4^{\odot}\rangle$	29
1.5	Zusammenfassung des Verhaltens des $ \mathcal{C}_4^{\odot}\rangle$ bei lokalen Messungen am Qubit n.	30
1.6	Alle 16 <i>Stabilizer</i> -Operatoren des 4-Qubit <i>Cluster-Zustands</i> $ \mathcal{C}_4^{\odot}\rangle$	30
2.1	Zählraten für Einzel-Photon-Detektionen in den verschiedenen Moden.	38
2.2	Gemessene Zählraten für Koinzidenzen zwischen mehreren Moden.	38
2.3	Auswahl verschiedener HOM-Dips.	62
2.4	<i>Fidelities</i> zwischen den gemessenen und idealen Ausgangszuständen $\hat{\rho}^{[exp]}$ bzw. $\hat{\rho}^{[ideal]}$ des Phasengatters.	66
3.1	Alle 16 Korrelationen \mathcal{K} der <i>Stabilizer</i> -Operatoren des 4-Qubit <i>Cluster-Zustands</i> $ \mathcal{C}_4^{exp}\rangle$	87
3.2	Nachweis echter 3-Qubit-Verschränkung durch die Erwartungswerte von $\hat{\mathcal{W}}_{\mathcal{C}_3^{\odot}}^{\pm}$ an die Zustände $\mathbf{a}\dots\mathbf{d}\langle\pm \mathcal{C}_4^{exp}\rangle$	89
3.3	Alle 8 Korrelationen \mathcal{K} der <i>Stabilizer</i> -Operatoren der 3-Qubit <i>Cluster-Zustände</i> $\mathbf{a}\langle\pm \mathcal{C}_4^{exp}\rangle_{\mathbf{abcd}} = \mathcal{C}_3^{exp}\rangle_{\mathbf{bcd}}^{\pm}$	90
3.4	Nachweis von 2-Qubit-Verschränkung durch die Erwartungswerte von $\hat{\mathcal{W}}_{\mathbf{a/b}}$ bzw. $\hat{\mathcal{W}}_{\mathbf{c/d}}$ nach Bildung der partiellen Spur.	91
3.5	Experimentell bestimmte Dichtematrizen in der $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x$ -Basis für die Zustände $\mathbf{bc}\langle\pm\pm \mathcal{C}_4^{exp}\rangle_{\mathbf{abcd}}$ mit jeweiliger <i>Fidelity</i> an den theoretischen Zustand.	92
3.6	<i>Fidelity</i> \mathcal{F} der experimentellen Zustände an die jeweiligen theoretischen Zustände bei Messung der Qubits \mathbf{b} und \mathbf{c} in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis.	93

Danksagung

Danken möchte sehr herzlich allen, die mich während des ganzen Jahres über unterstützt und mich begleitet haben. Besonders sind darunter zu erwähnen:

Professor Harald Weinfurter, der es mir ermöglichte an einem der aktuellsten und zugleich spannendsten Themen in der modernen Physik mitzuarbeiten.

Nikolai Kiesel und Christian Schmid verdienen meinen besonderen Dank, da sie mir immer hilfreich zur Seite gestanden sind und durch die vielen Diskussionen und Anregungen zum Gelingen dieser Arbeit wesentlich beigetragen haben.

Thank you Pavel and Youssef for the nice time and for all good discussions, even though — or perhaps especially *because* — they didn't always concern physics. :-)

Danke auch an die gesamte XQP Gruppe für die freundliche Atmosphäre und die schöne Zeit in Ringberg und Berlin.

Meinen Eltern möchte ich für die vielen kleinen Dinge danken, mit denen sie mir während dieses Jahres viel geholfen haben.

Meiner Freundin Barbara danke ich ganz besonders für die liebevolle Unterstützung.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

München, den **2. Mai 2005**
