
Multi-Photonen Verschränkung

Reinhold D. Pohlner



München 2007

Multi-Photonen Verschränkung

Reinhold D. Pohlner

Diplomarbeit
an der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Reinhold D. Pohlner
aus Rosenheim

München, den 22. Juni 2007

Erstgutachter: Prof. H. Weinfurter

Zweitgutachter: Prof. E. Riedle

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	1
1.1	Photonen als Qubits	1
1.2	Verschränkung	4
1.3	Klassen von Verschränkung	7
1.4	Charakterisierung von verschränkten Zuständen	11
1.4.1	Die Fidelity	11
1.4.2	Das PPT-Kriterium	12
1.4.3	Witness Operator	12
2	Der experimentelle Aufbau	15
2.1	Die kontinuierliche Familie der beobachtbaren Zustände	15
2.2	Umsetzung und Justage des experimentellen Aufbaus	19
2.2.1	Spontane parametrische Fluoreszenz	19
2.2.2	Der Überlapp am polarisierenden Strahlteiler	23
2.2.3	Die Strahlteiler	31
2.2.4	Polarisationsanalyse	32
2.3	Charakterisierung des Überlapps mit der SPDC	35
2.3.1	Zwei-Photonen Interferenz	37
3	Experimentelle Charakterisierung der beobachteten Zustände	41
3.1	Auswahl der Zustände	41
3.2	Der GHZ-Zustand	42
3.2.1	Qualität und Verschränkung	43
3.2.2	Korrelationsfunktion	47
3.3	Der antisymmetrische Zustand $ \psi^{(4)}\rangle$	52
3.3.1	Qualität und Verschränkung	52
3.3.2	GHZ-Korrelationsfunktion und $ \psi^{(4)}\rangle$	54
3.3.3	Charakterisierung des Überlapps mit dem $ \psi^{(4)}\rangle$ -Zustand	55
3.4	Der biseparable Zustand: $ \phi^+\rangle \otimes \phi^+\rangle$	61
3.4.1	Qualität und Verschränkung	61
3.4.2	GHZ-Korrelationsfunktion und $ \phi^+\rangle \otimes \phi^+\rangle$	67
3.5	Zusammenfassung	68

4 Zusammenfassung und Ausblick

69

Literaturverzeichnis

71

Einleitung

Die Erfolgsgeschichte der Quantenmechanik begann vor gut 100 Jahren mit der Einführung des Wirkungsquantums durch Max Planck. Mit der sich im folgenden entwickelnden Quantenmechanik konnten beobachtete und bis dahin unerklärbare Phänomene der Physik, wie zum Beispiel die Spektren von Atomen, erklärt werden.

Die Quantenmechanik brachte jedoch auch einen gravierenden Wandel des uns vertrauten, intuitiven Weltbilds mit sich. In einem 1935 veröffentlichten Artikel stellten A. Einstein, B. Podolsky und N. Rosen ein Gedankenexperiment vor, das heute auch unter dem Begriff EPR-Paradoxon bekannt ist [1]. In diesem betrachteten sie ein System aus zwei Teilchen, welche in Ort und Impuls korreliert sind und legten der Argumentation ein physikalisches Weltbild von Lokalität und Realität zu Grunde, das einem uns intuitiven und vertrauten Weltbild entspricht. Unter diesen Annahmen konnten sie zeigen, dass die Quantenmechanik keine vollständige Beschreibung der Natur darstellen könne. Erwin Schrödinger prägte daraufhin den Begriff der Verschränkung [2] für dieses Phänomen der Quantenmechanik und brachte damit zum Ausdruck, dass es in der Quantenmechanik Zustände gibt, in denen die einzelnen Teilchen nicht mehr unabhängig voneinander beschrieben werden können. Die durch dieses Gedankenexperiment entfachte Diskussion war zunächst rein philosophischer Natur. Es war John Bell [3], der die Unvereinbarkeit von Lokalität und Realität mit der Quantenmechanik zeigte und einen Weg aufwies, die Argumente in dieser Diskussion experimentell zu prüfen.

Neben den anhaltenden Diskussionen zur Interpretation der Quantenmechanik wird heutzutage Verschränkung auch als Resource für praktische Anwendungen genutzt. Aus der Kombination von Informationstheorie und Quantenmechanik entstand dabei das Gebiet der Quanteninformation und nicht-klassische Anwendungen wie zum Beispiel die Quantenteleportation [4] und der Quantencomputer [5] wurden entwickelt. Für die Entwicklung neuer Anwendungen ist das Verständnis der Verschränkung unabdingbar. Während Verschränkung in einem zwei-Qubit System schon gut verstanden ist, stellte sich beim Versuch das Konzept der Verschränkung auf mehrere Teilchen zu erweitern unter anderem die Frage, wie Verschränkung hier quantifiziert werden kann. Desweiteren gibt es bei mehreren Teilchen sich ausschließende Möglichkeiten diese miteinander zu verschränken. Somit wird nicht nur die Frage nach einer Klassifizierung von Verschränkung aufgeworfen, sondern es werden auch Methoden dies zu charakterisieren nötig.

Bei der experimentellen Untersuchung von Verschränkung gilt es Herausforderungen wie Dekohärenz und Kontrollierbarkeit des verwendeten Systems zu meistern. Zum Beispiel

konnten bei Multi-Photonen Experimenten bereits viele verschränkte Zustände beobachtet werden. Diese Experimente basieren auf spontaner parametrischer Fluoreszenz als Photonquelle, kombiniert mit linearer Optik und Koinzidenz-Detektion. Der Erfolg dieser Methode zur Beobachtung von verschränkten Zuständen liegt zum einen in der Flexibilität der Photonquelle und zum anderen in der vernachlässigbaren Dekohärenz der Photonen. Mit diesen Aufbauten war es möglich zum Beispiel Quantenteleportation zu realisieren [4] und zu zeigen, dass dekohärenz-freie Kommunikation möglich ist [6]. Für diese „proof of principle“ Experimente musste dabei für jeden Zustand, der für die Anwendung benötigt wurde, ein eigener experimenteller Aufbau entworfen und umgesetzt werden.

Wir werden hier ein Experiment vorstellen, mit dem nicht wie bisher nur ein Zustand, sondern eine Familie von Zuständen mit einem Aufbau zugänglich wird. Diese Familie ist dabei eine kohärente Überlagerung aus einem $|GHZ\rangle$ -Zustand und einem biseparablen Zustand, wobei mit einem experimentell einfach kontrollierbaren Parameter deren Gewichtung frei gewählt werden kann. Mit dieser Familie von Zuständen kann zum einen das Phänomen der Verschränkung untersucht und somit neue Erkenntnisse über die Verschränkungseigenschaften von Zuständen erlangt werden, zum anderen kann der Aufbau als Quelle für Zustände verwendet werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird zunächst der experimentelle Aufbau vorgestellt. Desweiteren greifen wir exemplarisch drei für den Aufbau charakteristische Zustände auf und charakterisieren diese. Wir konzentrieren uns dabei auf die Güte der beobachteten Zustände wie auf einen Nachweis ihrer Verschränkung.

Kapitel 1

Theorie

In diesem Kapitel werden die für diese Arbeit relevanten Notationen und theoretischen Grundlagen eingeführt. Beim Übergang von ein- auf N-Qubit Systeme werden wir sehen, dass die Verschränkung eine Konsequenz des Superpositionsprinzips der Quantenmechanik ist und Klassifizierungen von Verschränkung für Systeme bis zu vier Qubits vorstellen. Zum Schluß werden experimentelle Werkzeuge zur Charakterisierung der beobachteten Zustände vorgestellt.

1.1 Photonen als Qubits

In der Quanteninformation ist das *Qubit* das zentrale Element und stellt das Analogon zum klassischen Bit dar. Das Qubit ist ein quantenmechanisches zwei-Niveau-System, dessen Basiszustände, analog zum klassischen Bit, mit $|0\rangle$ und $|1\rangle$ bezeichnet werden. Diese Basisvektoren spannen den zweidimensionalen Hilbertraum \mathbb{H}^2 des Qubits auf. Der essentielle Unterschied zwischen einem klassischen Bit und einem Qubit liegt im *Superpositionsprinzip* der Quantenmechanik. Dadurch kann das Qubit nicht nur die Werte $|0\rangle$ und $|1\rangle$ annehmen, sondern sich auch in einer Superposition dieser beiden Zustände befinden:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{1.1}$$

Die Koeffizienten α und β sind komplexe Zahlen und erfüllen die Normierungsbedingung $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Zur experimentellen Realisierung eines Qubits kann prinzipiell jedes quantenmechanische System, in dem sich zwei eindeutig unterscheidbare Unterzustände definieren lassen, verwendet werden. In diesen zwei Unterzuständen werden die zwei Basiszustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ des Qubits kodiert. In unserem Experiment werden Photonen als Qubits verwendet, wobei die Basiszustände $|0\rangle/|1\rangle$ im Polarisationszustand der Photonen kodiert werden:

$$\begin{aligned} |H\rangle &:= |0\rangle \\ |V\rangle &:= |1\rangle \end{aligned}$$

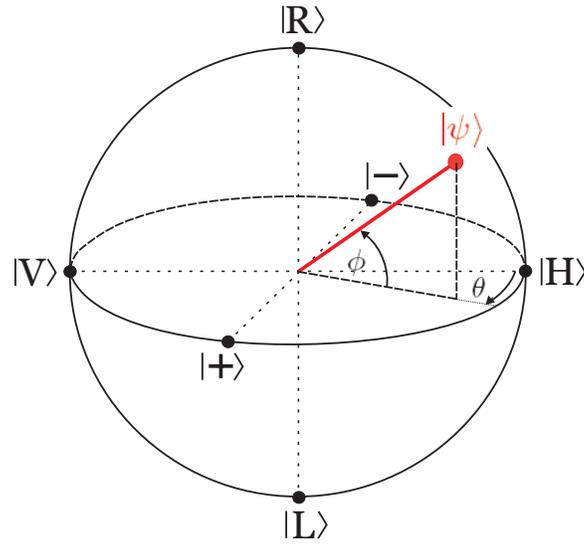


Abbildung 1.1: Mit Hilfe der Blochkugel kann der Zustand $|\psi\rangle$ eines Qubits graphisch dargestellt werden.

wobei $|H\rangle$ horizontaler und $|V\rangle$ vertikaler Polarisation entsprechen.

Ein nützliches Bild zur Veranschaulichung von Qubits ist die Blochkugel¹[5]. Unter Berücksichtigung der Normierungsbedingung schreiben wir Gl. (1.1) um in:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |H\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |V\rangle \quad (1.2)$$

wobei eine globale Phase vernachlässigt wurde. Die zwei Parameter $\theta \in \{0, \pi\}$ und $\phi \in \{0, 2\pi\}$ legen einen Punkt auf der Blochkugel (Abb: 1.1), die den Radius eins besitzt, fest. Mit ihr lassen sich somit die Zustände eines Qubits als Punkte auf ihrer Oberfläche darstellen. Dabei gibt es noch folgende ausgezeichnete Zustände:

$$\begin{aligned} |+/-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle \pm |V\rangle) \\ |R/L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle \pm i|V\rangle) \end{aligned} \quad (1.3)$$

welche Superpositionen der Basiszustände des Qubits sind. Die Zustände $|+/-\rangle$ repräsentieren dabei Photonen mit $\pm 45^\circ$ -linearer Polarisation und $|R/L\rangle$ Photonen die rechts-/links-zirkular polarisiert sind. Auch diese Zustände können als Basis für den Hilbertraum \mathbb{H}^2 des Qubits verwendet werden.

Die Messung einer Observablen an einem Qubit entspricht einer projektiven Messung auf die Eigenbasis des Operators. Als mögliche Messergebnisse erhalten wir die Eigenwerte des

¹Im Zusammenhang mit Photonen wird eigentlich von der Poincaré-Sphäre gesprochen.

Operators, wobei sich das Qubit nach der Messung im entsprechenden Eigenzustand des Operators befindet [7]. Im zweidimensionalen Hilbertraum \mathbb{H}^2 bilden die Paulimatrizen $\hat{\sigma}_i$ zusammen mit der Einheitsmatrix $\hat{\mathbb{1}}$ eine Operatorbasis:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_0 := \hat{\mathbb{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Die zugehörigen Eigenvektoren dieser Basis sind die oben definierten Zustände mit den Eigenwerten ± 1 :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x | + / - \rangle &= \pm | + / - \rangle \\ \hat{\sigma}_y | R / L \rangle &= \pm | R / L \rangle \\ \hat{\sigma}_z | H / V \rangle &= \pm | H / V \rangle \end{aligned} \quad (1.5)$$

Für die Einheitsmatrix $\hat{\mathbb{1}}$ ist jeder Zustand $|X\rangle$ ein Eigenvektor mit Eigenwert $+1$: $\hat{\mathbb{1}}|X\rangle = |X\rangle$. Um zum Beispiel den Erwartungswert $\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \langle \psi | \hat{\sigma}_x | \psi \rangle$ der Observablen $\hat{\sigma}_x$ für den Zustand $|\psi\rangle$ zu berechnen, zerlegen wir diesen in Projektoren $\hat{P}_\pm = |\pm\rangle\langle\pm|$ auf seine Eigenbasis mit dem entsprechenden Eigenwert als Vorfaktor:

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \langle \psi | \left(\hat{P}_+ - \hat{P}_- \right) | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_+ | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{P}_- | \psi \rangle \quad (1.6)$$

Der Erwartungswert $\langle \psi | \hat{P}_\pm | \psi \rangle$ des Projektionsoperators \hat{P}_\pm ist dabei die Wahrscheinlichkeit $p_{|\psi\rangle}^\pm$, dass sich das Qubit nach der Messung im Zustand $|\pm\rangle$ befindet und wir als Messwert entsprechend ± 1 erhalten. Die Messung der Observablen $\hat{\sigma}_x$ ist eine Projektion des Qubitzustandes $|\psi\rangle$ auf die $|+\rangle/|-\rangle$ -Basis. Deshalb nennt man dies auch eine Messung des Qubits in der $|+\rangle/|-\rangle$ -Basis und entsprechend für $\hat{\sigma}_y$ und $\hat{\sigma}_z$ eine Messung in der $|R\rangle/|L\rangle$ bzw. $|H\rangle/|V\rangle$ -Basis. Diese Basen werden auch als *Standardbasen* bezeichnet.

Im Experiment werden die Photonen mit Hilfe von projektiven Messungen untersucht. Die Information, die wir durch eine solche Messung an einem Qubit erhalten, hängt von der verwendeten Messbasis ab. Eine spezielle Messbasis, die bei der Charakterisierung der experimentell beobachteten Zustände eine Rolle spielt, ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} |\gamma^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + ie^{-i\gamma}|V\rangle) \\ |\gamma^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - ie^{-i\gamma}|V\rangle) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Diese Menge von Messbasen, die von dem Parameter γ abhängt, liegt auf dem Großkreis $|R\rangle \rightarrow |+\rangle \rightarrow |L\rangle \rightarrow |-\rangle \rightarrow |R\rangle$, was in Abbildung 1.2 verdeutlicht ist. Der zugehörige Operator, der über die Eigenwertgleichung $\hat{\sigma}_\gamma |\gamma^\pm\rangle = \pm |\gamma^\pm\rangle$ definiert wird, ist:

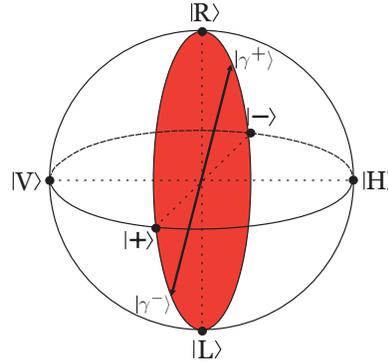


Abbildung 1.2: Zur Veranschaulichung der Menge der Messbasen $|\gamma^+\rangle/|\gamma^-\rangle$

$$\hat{\sigma}_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{i\gamma} \\ ie^{-i\gamma} & 0 \end{pmatrix} = \cos(\gamma)\hat{\sigma}_y + \sin(\gamma)\hat{\sigma}_x \quad (1.8)$$

Bei der obigen Berechnung des Erwartungswerts wurde ein so genannter *reiner Zustand* angenommen. Daneben gibt es als Verallgemeinerung noch *gemischte Zustände*. Diese werden durch den *Dichteoperator* $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \quad (1.9)$$

$$\text{mit : } p_i \in \mathbb{R} \text{ und } \sum_i p_i = 1 \quad (1.10)$$

beschrieben, wobei die Zustände $|\phi_i\rangle$ reine Zustände sind und p_i die Wahrscheinlichkeit angibt mit der sich das System in diesem Zustand befindet. Der Erwartungswert einer Observablen $\hat{\mathcal{O}}$ berechnet sich durch Spurbildung mit dem Dichteoperator:

$$\langle\hat{\mathcal{O}}\rangle = \text{Tr}[\hat{\mathcal{O}} \hat{\rho}] \quad (1.11)$$

1.2 Verschränkung

Wir haben bisher nur ein-Qubit Systeme betrachtet und wollen nun zu N-Qubit Systemen übergehen. Der resultierende N-Qubit Hilbertraum \mathbb{H}_N ist ein Tensorprodukt der ein-Qubit Hilberträume \mathbb{H}_i^2 :

$$\mathbb{H}_N = \bigotimes_{i=1}^N \mathbb{H}_i^2 \quad (1.12)$$

Die Basis von \mathbb{H}_N besteht aus allen N-Tupeln, die sich aus den Basiszuständen $|0\rangle/|1\rangle$ der ein-Qubit Hilberträume \mathbb{H}_i^2 bilden lassen:

$$\begin{aligned} |i\rangle \otimes |j\rangle \otimes \cdots \otimes |k\rangle &= |i\ j \ \cdots \ k\rangle \\ \text{mit: } i, j, \dots, k &\in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Der N-Qubit Hilbertraum hat somit 2^N Basiszustände $|i\ j \ \cdots \ k\rangle$. Als Basis für die ein-Qubit Hilberträume kann dabei eine der Standardbasen oder eine beliebige andere Basis verwendet werden. Auf Grund des Superpositionsprinzips der Quantenmechanik, kann der allgemeine reine Zustand $|\psi\rangle$ des N-Qubit Systems als Linearkombination der Basisvektoren geschrieben werden:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j,\dots,k \in \{1,0\}} d_{i,j,\dots,k} |i\ j \ \cdots \ k\rangle \quad (1.14)$$

$$\text{mit } d_{i,j,\dots,k} = \langle \psi | i\ j \ \cdots \ k \rangle \in \mathbb{C}, \quad \sum_{i,j,\dots,k \in \{1,0\}} |d_{i,j,\dots,k}|^2 = 1 \quad (1.15)$$

Allerdings kann nicht jeder mögliche Zustand $|\psi\rangle$ des Systems als Produktzustand aus ein-Qubit Zuständen $|\psi_i\rangle$ geschrieben werden:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_N\rangle \\ \text{mit } |\psi_i\rangle &= \alpha_i |0\rangle_i + \beta_i |1\rangle_i \end{aligned} \quad (1.16)$$

Dabei bezeichnet $|\psi_i\rangle$ den Zustand des i-ten Qubits, dargestellt in einer beliebigen Basis $|0\rangle_i/|1\rangle_i$. Man nennt $|\psi\rangle$ einen nicht-separablen Zustand. Dies bedeutet, dass es im allgemeinen nicht möglich ist, jedem einzelnen Qubit einen einzigen, von den anderen Qubits unabhängigen Zustandsvektor $|\psi_i\rangle$ zuzuordnen. Somit können die einzelnen Qubits nicht unabhängig voneinander beschrieben werden, sondern das System muß als Ganzes betrachtet werden. Dies drückt formal das Phänomen der *Verschränkung* [2, 1] aus. Zur Definition von Verschränkung wird die nicht-Separabilität des Zustands $|\psi\rangle$ verwendet und man bezeichnet ein System aus N-Qubits als verschränkt, falls dieses nicht als Produktzustand aus ein-Qubit Zuständen $|\psi_i\rangle$ geschrieben werden kann.

$$|\psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_N\rangle \iff \text{verschränkt} \quad (1.17)$$

Die Zustände des Systems, die als Produktzustand geschrieben werden können und somit nach obiger Definition nicht verschränkt sind, werden als separabel bezeichnet.

Die Verschränkung ist eine Konsequenz des Superpositionsprinzips der Quantenmechanik. Sie kann deshalb mit den Konzepten der klassischen Physik [1] nicht erklärt werden und

ist somit ein rein quantenmechanisches Phänomen.

Die obige Definition von Verschränkung (Gl. 1.17) gilt nur für reine Zustände. In gemischten N-Qubit Systemen definiert man Verschränkung mit Hilfe der Dichtematrix, wobei ein gemischter Zustand als verschränkt bezeichnet wird, falls dieser sich nicht als Linearkombination von Produktzuständen schreiben lässt [8]:

$$\hat{\rho} \neq \sum_{\nu} p_{\nu} (\hat{\rho}_1^{\nu} \otimes \hat{\rho}_2^{\nu} \otimes \cdots \otimes \hat{\rho}_N^{\nu}) \quad (1.18)$$

wobei die $(\hat{\rho}_1^{\nu} \otimes \hat{\rho}_2^{\nu} \otimes \cdots \otimes \hat{\rho}_N^{\nu})$ separable Zustände des Systems darstellen und $\hat{\rho}_i^{\nu}$ den Zustand des i-ten Qubits i repräsentiert.

Die Verschränkung eines Quantensystem zeichnet sich durch die nicht- klassischen *Korrelationen* $K_{ij\dots k}$ in den Messergebnissen der einzelnen Qubits aus. Wie diese Korrelation berechnet werden kann, soll zunächst an einem zwei-Qubit System veranschaulicht und anschließend auf N-Qubits verallgemeinert werden. Als Basis des zwei-Qubit Hilbertraums $\mathbb{H}_A^2 \otimes \mathbb{H}_B^2$ verwenden wir dabei $\{|HH\rangle, |HV\rangle, |VH\rangle, |VV\rangle\}$, wobei die beiden Qubits mit A und B bezeichnet werden. Die Korrelation K_{AB} in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis berechnet sich aus:

$$K_{AB} := p^{HH} - p^{HV} - p^{VH} + p^{VV} = \langle \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \rangle \quad (1.19)$$

Der Wert der Korrelation liegt zwischen $-1 \leq K_{AB} \leq 1$. Ist der Erwartungswert der Korrelation -1 werden die Qubits als antikorreliert bezeichnet, für $+1$ als korreliert. Ist der Erwartungswert Null sind die Qubits nicht korreliert. Der Betrag der Korrelation ist dabei ein Maß dafür, wie stark die Messergebnisse der einzelnen Qubits in der gemessenen Basis voneinander abhängig sind. Die obige Definition der Korrelation kann noch verallgemeinert werden, indem wir die Messbasen der einzelnen Qubits unabhängig voneinander wählen:

$$K_{A_{\alpha}B_{\beta}} = \langle \hat{\sigma}_{\alpha} \otimes \hat{\sigma}_{\beta} \rangle \quad (1.20)$$

Die Indizes $\{\alpha, \beta\}$ beziehen sich dabei auf die Messbasen der einzelnen Qubits.

Um N-Qubit Systeme zu untersuchen verallgemeinern wir die oben eingeführte Korrelation für zwei Qubits (Gl. 1.19) auf mehrere durch:

$$K_{i_{\alpha} j_{\beta} \dots k_{\nu}} = \langle \hat{\sigma}_{\alpha} \otimes \hat{\sigma}_{\beta} \otimes \cdots \otimes \hat{\sigma}_{\nu} \rangle \quad (1.21)$$

wobei die Indizes $\{\alpha, \beta, \dots, \nu\}$ die Messbasen der einzelnen Qubits angeben. Die möglichen Werte einer Korrelation liegen weiterhin zwischen -1 und $+1$. Da ein System aus N-Qubits als verschränkt bezeichnet wird, wenn sein Zustand nicht als Produktzustand aus ein-Qubit Zuständen geschrieben werden kann, gibt es verschiedene Arten der Verschränkung. Darauf und auf Klassifikationen von Verschränkung wollen wir im nächsten Abschnitt 1.3 eingehen.

1.3 Klassen von Verschränkung

Die Frage nach den verschiedenen Möglichkeiten der Verschränkung, in einem N-Qubit System, ist noch nicht geklärt. Wir werden in diesem Abschnitt nur auf Systeme bis zu vier Qubits eingehen, da experimentell vier-Qubit Zustände untersucht werden.

Für eine Klassifikation von verschränkten Zuständen benötigen wir ein Kriterium, mit welchem entschieden werden kann, ob zwei Zustände $|\psi\rangle$ und $|\widetilde{\psi}\rangle$ der gleichen Klasse zugeordnet werden können. Da Verschränkung eine nicht-lokale Eigenschaft eines Quantensystems ist, kann sie nicht durch lokale Operationen (LO) erzeugt werden. Lokale Operationen umfassen dabei alle unitären Transformationen sowie lokale Messungen an einem Qubit. Ein naheliegendes Kriterium ist deshalb, zwei verschränkte Zustände als äquivalent zu bezeichnen, falls sich diese mit Hilfe von LO ineinander transformieren lassen. Um eine Erweiterung dieser Bedingung vorzustellen betrachten wir folgende Situation.

Zwei Parteien A und B haben je ein Teilchen eines verschränkten zwei-Qubit Systems. Beide können beliebige LO auf ihre Qubits anwenden. Über einen klassischen Kommunikationskanal, wie zum Beispiel einer Internetverbindung, können sie sich gegenseitig mitteilen welche LO sie auf ihr Qubit angewandt haben. Mit diesen Mitteln, die unter dem Begriff LOCC (*local operations and classical communication*) zusammengefasst werden, versuchen sie nun den Zustand $|\psi\rangle$ in den Zustand $|\widetilde{\psi}\rangle$ transformieren. Ist dies, wenn auch nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit größer als Null, möglich, werden die Zustände $|\psi\rangle$ und $|\widetilde{\psi}\rangle$ als äquivalent unter dem SLOCC (*stochastic local operations and classical communication*) Kriterium bezeichnet.

Für ein zwei-Qubit System, das sich in einem reinen Zustand befindet, wurde in [9] gezeigt, dass alle möglichen verschränkten Zustände des Systems unter SLOCC äquivalent zueinander sind. Somit gibt es in diesem Fall nur eine Klasse von verschränkten Zuständen und als Repräsentant kann zum Beispiel der Singulett Zustand $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle - |VH\rangle)$ gewählt werden.

Im Falle von drei-Qubit Systemen können die reinen Zustände eines Quantensystems in sechs Klassen eingeteilt werden [10]. Diese sind in Abbildung 1.3 schematisch dargestellt und sollen kurz besprochen werden. Dabei werden die Qubits mit A, B und C bezeichnet.

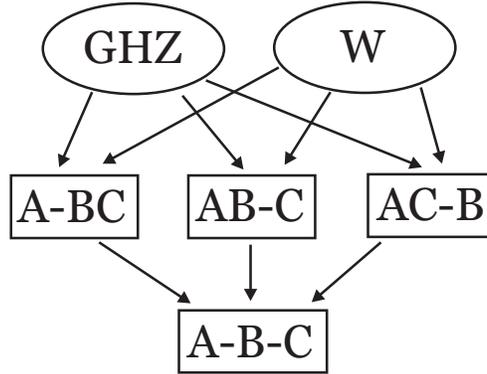


Abbildung 1.3: Schematische Darstellung der Verschränkungsklassen in einem drei-Qubit System, wobei die Qubits mit A, B und C bezeichnet werden. Die Pfeile verdeutlichen die nicht reversiblen Transformationen zwischen den Klassen.

- **A-B-C:**

Diese Klasse beinhaltet alle Produktzustände, wie zum Beispiel:

$$|\psi\rangle = |H\rangle_A |R\rangle_B |H\rangle_C \quad (1.22)$$

- **A-BC, AB-C, AC-B:**

Diese Klasse ist dadurch charakterisiert, dass zwei Qubits miteinander verschränkt sind, während ein drittes mit diesen einen Produktzustand bildet. Ein Beispiel für die A-BC Klasse ist:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |H\rangle_A (|HV\rangle_{BC} + |VH\rangle_{BC}) \quad (1.23)$$

Zustände, die sich zu einer dieser drei Klassen zuordnen lassen, werden als *biseparable* Zustände bezeichnet.

- **W-Klasse:**

Die Zustände dieser Klasse sind echte 3-Qubit verschränkte Zustände. Diese Klasse wird durch den so genannten $|W\rangle$ -Zustand repräsentiert:

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|HHV\rangle_{ABC} + |HVV\rangle_{ABC} + |VHH\rangle_{ABC}) \quad (1.24)$$

Die Verschränkung in diesem Zustand ist dabei auf die drei Qubits „verteilt“. Dies kann verdeutlicht werden, indem man eine projektive Messung $\hat{P}_H = |H\rangle\langle H|$, am A-Qubit betrachtet. Dadurch erhalten wir als resultierenden Zustand:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |H\rangle_A (|HV\rangle_{BC} + |VH\rangle_{BC}) \quad (1.25)$$

Dieser Zustand ist ein biseparabler Zustand, wobei sich die beiden Teilchen B und C in einem maximal verschränkten Zustand befinden. Für eine Projektion auf $\hat{P}_V = |V\rangle\langle V|$, ist der resultierende Zustand separabel. Die Verschränkung des resultierenden Zustands hängt somit vom Messergebnis ab.

- **GHZ-Klasse:**

Diese Zustände sind ebenfalls echt drei-Qubit verschränkt, jedoch inäquivalent zur W-Klasse und werden durch den $|GHZ\rangle$ -Zustand repräsentiert:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|HHH\rangle_{ABC} + |VVV\rangle_{ABC}) \quad (1.26)$$

Betrachten wir wieder die projektive Messung \hat{P}_H des A-Qubits, so ist der resultierende Zustand ein Produktzustand $|\psi\rangle = |HHH\rangle$. Für ein Projektion auf $\hat{P}_+ = |+\rangle\langle +|$ erhalten wir den verschränkten Zustand:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_A (|HH\rangle_{BC} + |VV\rangle_{BC}) \quad (1.27)$$

Somit hängt die Verschränkung des Zustands nach der Messung von der Messbasis ab und zeigt somit andere Verschränkungseigenschaften als der $|W\rangle$ -Zustand.

Betrachtet man ein vier-Qubit System können alle reinen Zustände in neun Familien eingeteilt werden [11]. Jede Familien wird von einem Zustand, der von bis zu vier Parametern $\{a, b, c, d\}$ abhängen kann, repräsentiert. Eine Klasse wird nun durch einen Repräsentanten einer Familie zusammen mit einem Parametersetting definiert. Im Vergleich zu drei Qubits, gibt es eine Klasse G_{abcd} , welche der GHZ-Klasse für drei Qubits entspricht. Die anderen Klassen repräsentieren zwei- bzw. drei-Qubit Verschränkung, welche auf die vier Qubits „verteilt“ ist. In Hinblick auf das im experimentellen Teil der Arbeit vorgestellte Experiment ist die G_{abcd} Klasse:

$$G_{abcd} = \frac{a+d}{2} (|0000\rangle + |1111\rangle) + \frac{a-d}{2} (|0011\rangle + |1100\rangle) \\ + \frac{b+c}{2} (|0101\rangle + |1010\rangle) + \frac{b-c}{2} (|0110\rangle + |1001\rangle) \quad (1.28)$$

$$\text{mit } \{a, b, c, d\} \in \mathbb{C} \quad \text{mit } \text{Re}\{a, b, c, d\} > 0$$

von Interesse. Wie in Abschnitt 2.1 gezeigt wird, kann mit unserem experimentellen Aufbau eine Familie von Zuständen aus der Klasse G_{abcd} beobachtet werden. Diese Familie von Zuständen kann als Superposition eines 4-Qubit $|GHZ\rangle$ -Zustands² und dem Produktzustand $|\psi^+\rangle_{AB}|\psi^+\rangle_{CD}$ ³ geschrieben werden:

² $|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0000\rangle + |1111\rangle$

³ $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + |10\rangle$

$$|\psi(\alpha)\rangle = \alpha|GHZ\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}|\psi^+\rangle_{AB}|\psi^+\rangle_{CD} \quad (1.29)$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $0 \leq \alpha \leq 1$

Der Parameter α ist dabei experimentell kontrollierbar, wodurch die Familie von Zuständen (Gl. 1.29) zugänglich wird. Dies ist im Vergleich zu anderen Experimenten wie zum Beispiel [6, 12, 13] ein großer Vorteil, da durch diesen freien Parameter mit einem experimentellen Aufbau verschiedene Zustände beobachtet und analysiert werden können.

Wird das Tensorprodukt im Zustand $|\psi(\alpha)\rangle$ explizit ausgeschrieben und vergleicht man anschließend Gl. (1.29) mit Gl. (1.28) so erhält man die folgenden Relationen zwischen dem experimentell kontrollierbaren Parameter α und den Parametern der Klasse G_{abcd} :

$$\begin{aligned} a &= d = \alpha \\ b &= 2\sqrt{1-\alpha^2} \\ c &= 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

1.4 Charakterisierung von verschränkten Zuständen

Durch eine Tomographie [14] des beobachteten Zustands kann dessen Dichtematrix rekonstruiert werden, wodurch wir die vollständige Information über den Zustand erhalten. Eine Tomographie ist aufgrund der niedrigen Zählrate im Experiment nicht realistisch, da Messzeiten bis zu einer Woche auftreten können und die gesamte Messapparatur über diesen Zeitraum stabil sein müsste. Deshalb werden in diesem Abschnitt Methoden vorgestellt mit denen es möglich ist, den beobachteten Zustand mit vergleichsweise wenigen Messeinstellungen zu charakterisieren.

1.4.1 Die Fidelity

Für die Charakterisierung des im Experiment beobachteten Zustand $\hat{\rho}_{exp}$ ist es zunächst interessant, wie groß die Übereinstimmung zwischen dem beobachteten Zustand $\hat{\rho}_{exp}$ und dem theoretisch erwarteten Zustand $\hat{\rho}_{th}$ ist. Um dies zu quantifizieren greifen wir auf die *Fidelity* \mathcal{F} zurück [5]:

$$\mathcal{F}(\hat{\rho}_{th}, \hat{\rho}_{exp}) = \left[\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_{th}} \hat{\rho}_{exp} \sqrt{\hat{\rho}_{th}}} \right]^2 \quad (1.31)$$

Die Zustände $\hat{\rho}_{th}$ und $\hat{\rho}_{exp}$ sind dabei Dichtematrizen. Der Wertebereich von \mathcal{F} liegt zwischen null und eins. Je größer die Fidelity ist, desto größer ist die Übereinstimmung des beobachteten Zustands mit dem erwarteten. Dies ist somit auch ein Maß dafür, wie gut ein Zustand $\hat{\rho}_{th}$ mit einem experimentellen Setup „erzeugt“ werden kann. Als theoretische Zustände nehmen wir in dieser Arbeit reine Zustände $|\psi_{th}\rangle$ an. Dadurch lässt sich Gl. (1.31) vereinfachen:

$$\mathcal{F}(|\psi_{th}\rangle, \hat{\rho}_{exp}) = \langle \psi_{th} | \hat{\rho}_{exp} | \psi_{th} \rangle \quad (1.32)$$

Um die Fidelity an den theoretisch erwarteten Zustand experimentell zu bestimmen, zerlegen wir die Dichtematrix des experimentellen Zustands $\hat{\rho}_{exp}$ in eine Summe aus Produkten von Paulimatrizen [5]:

$$\hat{\rho}_{exp} = \frac{1}{2^4} \sum_{i,j,k,l=0}^3 (a_{ijkl}^{exp} \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_k \otimes \hat{\sigma}_l) \quad (1.33)$$

Die Koeffizienten a_{ijkl}^{exp} sind dabei die Erwartungswerte der entsprechenden Korrelationen:

$$a_{ijkl}^{exp} = \text{Tr} [\hat{\rho}_{exp} \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_k \otimes \hat{\sigma}_l] \quad (1.34)$$

und können somit experimentell bestimmt werden. Um die Fidelity zu erhalten, müssen nur die Korrelationen gemessen werden, welche in die Berechnung der Fidelity eingehen. Um diese relevanten Korrelationen zu bestimmen, setzen wir Gl. (1.33) in Gl. (1.32) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \langle \psi_{th} | \frac{1}{2^4} \sum_{i,j,k,l=0}^3 a_{ijkl}^{exp} \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_k \otimes \hat{\sigma}_l | \psi_{th} \rangle \\
&= \frac{1}{2^4} \sum_{i,j,k,l=0}^3 a_{ijkl}^{exp} a_{ijkl}^{th} \\
&\text{mit } a_{ijkl}^{th} = \langle \psi_{th} | \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_k \otimes \hat{\sigma}_l | \psi_{th} \rangle
\end{aligned} \tag{1.35}$$

wobei die Linearität der Spur ausgenutzt wurde. Daraus ist ersichtlich, dass nur die Korrelationen a_{ijkl}^{exp} gemessen werden müssen, wo für $a_{ijkl}^{exp} \neq 0$ gilt.

Wie oben bereits erwähnt wurde, ist die Fidelity \mathcal{F} ein Maß dafür, wie gut ein Zustand $|\psi\rangle$ mit einem experimentellen Setup „erzeugt“ werden kann. Dadurch ist es möglich, unterschiedliche experimentelle Aufbauten zur „Erzeugung“ des Zustands $|\psi\rangle$ zu vergleichen, da die Fidelity ein Setup unabhängiges Maß für die Güte eines Zustands ist.

1.4.2 Das PPT-Kriterium

Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium zum Nachweis von Verschränkung für ein System $\mathbb{H}_A^2 \otimes \mathbb{H}_B^2$ aus zwei-Qubits ist das PPT-Kriterium (*positive partial transposed*) [15]. Dazu betrachtet man die Dichtematrix des zwei-Qubit Systems:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_A^i \otimes \hat{\rho}_B^i \tag{1.36}$$

Nun wird eine Dichtematrix $\hat{\rho}_{PT}$ definiert, die aus $\hat{\rho}$ dadurch entsteht, indem nur die Dichtematrix $\hat{\rho}_A^i$ des Qubits A transponiert wird:

$$\hat{\rho}_{PT} = \sum_i p_i (\hat{\rho}_A^i)^T \otimes \hat{\rho}_B^i \tag{1.37}$$

In [15] wurde gezeigt, dass die Dichtematrix $\hat{\rho}_{PT}$ nur dann positive Eigenwerte besitzt, falls das zwei-Qubit System separabel ist.

Um diese Kriterium zur Charakterisierung verwenden zu können, muß die Dichtematrix des zwei-Qubit Systems bestimmt werden, da die Transposition keine physikalische Operation darstellt und somit nicht direkt gemessen werden kann.

1.4.3 Witness Operator

Zum experimentellen Nachweis der echten vier-Teilchen Verschränkung, benötigen wir ein messbares Kriterium, welches separable (biseparable) von echten N-Teilchen verschränkten Zuständen abgrenzt. Mit dem sogenannten *Witness Operator* \hat{W} [16, 17, 18] erhalten wir ein hinreichendes Kriterium zum Nachweis von echter N-Teilchen Verschränkung. Ein Zustand, der das hinreichende Kriterium nicht erfüllt, kann aber trotzdem noch verschränkt sein. Das Kriterium beruht auf der Tatsache, dass für jeden echten N-Teilchen

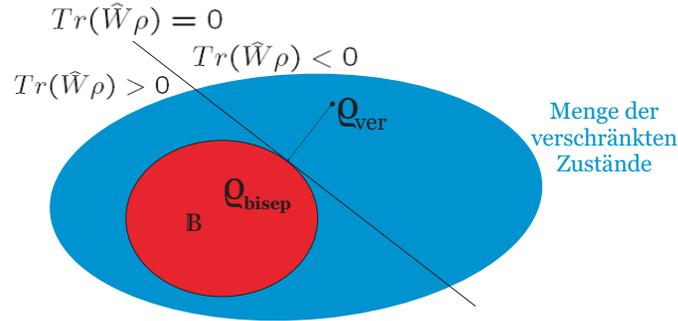


Abbildung 1.4: Geometrische Veranschaulichung, wie durch den Witness Operator \hat{W} die Verschränkung eines Zustands ρ nachgewiesen werden kann.

verschränkten Zustand ein Operator \hat{W} konstruiert werden kann, welcher einen negativen Erwartungswert mit diesem und einen positiven für alle biseparablen Zustände besitzt:

$$\hat{\rho} \text{ verschränkt} \iff \exists \hat{W} : \text{Tr}(\hat{W}\rho) \begin{cases} < 0 & : \text{für verschränkten Zustand } \hat{\rho} \\ \geq 0 & : \text{für alle biseparablen Zustände } \hat{\rho}_{\text{bisep}} \end{cases} \quad (1.38)$$

Somit ist ein negativer Erwartungswert ein eindeutiger Nachweis für die echte N-Teilchen Verschränkung des beobachteten Zustands.

Der Witness Operator muß für den entsprechenden Zustand $\hat{\rho}$ eigens konstruiert werden. Betrachtet man den sogenannten *allgemeinen Witness* [18, 17], der wie folgt definiert ist:

$$\hat{W} = \alpha \hat{\mathbb{1}} - |\psi\rangle\langle\psi| \quad (1.39)$$

$$\text{mit } \alpha = \max_{|\phi\rangle \in \mathbb{B}} |\langle\phi|\psi\rangle|^2 \quad (1.40)$$

kann das Verschränkungskriterium (1.38) geometrisch interpretiert werden. Dabei bezeichnet \mathbb{B} die Menge der biseparablen Zustände. Für die geometrische Interpretation ist die Tatsache entscheidend, dass der Unterraum der biseparablen Zustände konvex ist [19]. Dadurch kann für jeden verschränkten Zustand eine Hyperebene gefunden werden, welche die biseparablen von den verschränkten Zuständen trennt (Abb. 1.4). Um nun auszuschließen, dass auch biseparable Zustände das Verschränkungskriterium (1.38) erfüllen, muß α so gewählt werden, dass der Überlapp aller biseparablen Zustände $|\phi\rangle$ mit dem verschränkten Zustand $|\psi\rangle$ kleiner als α ist. Der Überlapp zweier Zustände kann als Abstand der beiden Zustände im Hilbertraum interpretiert werden.

Der Erwartungswert des Projektors $\hat{P}_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi|$ ist die Fidelity $\mathcal{F}_{|\psi\rangle}$ des beobachteten Zustands an den Zustand $|\psi\rangle$, für den der Witness Operator konstruiert wurde. Auf Grund dieser Konstruktion des Witness Operator werden Zustände mit einer Fidelity $\mathcal{F}_{|\psi\rangle}$ größer

als α , durch diesen Witness Operator als verschränkt nachgewiesen, da gilt:

$$\langle \hat{W} \rangle = \alpha - \mathcal{F}_{|\psi\rangle} \quad (1.41)$$

Aus diesem Grund kann mit Hilfe eines Witness Operators nicht zwischen einzelnen verschränkten Zuständen unterschieden, sondern lediglich die N-Qubit Verschränkung nachgewiesen werden.

Bei der experimentellen Charakterisierung der beobachteten Zustände, werden wir die hier eingeführten Werkzeuge benutzen, d.h. wir werden die Fidelity bestimmen und Verschränkung nachweisen. Da der Nachweis von Verschränkung vom beobachteten Zustand abhängt, werden auf die Eigenschaften der Zustände zugeschnittene Witness Operatoren verwendet werden. Um nachzuweisen, dass bestimmte zwei-Qubit Zustände separabel sind, werden wir das PPT-Kriterium benutzen.

Kapitel 2

Der experimentelle Aufbau

In diesem Kapitel wird der experimentelle Aufbau, mit dem die Familie von Zuständen $|\psi(\alpha)\rangle$ beobachtet werden kann, präsentiert. Zuerst werden durch eine Rechnung die Relationen zwischen den Parametern $\{a, b, c, d\}$ der Klasse G_{abcd} mit dem experimentell kontrollierbaren Parameter ϕ herausgearbeitet. Anschließend wird die experimentelle Umsetzung des Experiments besprochen. Zu Beginn wird die spontane parametrische Fluoreszenz, welche als Quelle für den vier-Photonen Eingangszustand $|in\rangle$ benutzt wird, eingeführt. Anschließend wird der Aufbau und die Justage des Experiments besprochen.

2.1 Die kontinuierliche Familie der beobachtbaren Zustände

Der schematische Aufbau des Experiments mit dem die Familie von Zuständen $|\psi(\phi)\rangle$ beobachtet werden kann, ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Die vier Photonen in den zwei Input-Moden a und c werden an dem polarisierenden Strahlteiler (Überlapp-PBS) kohärent überlagert und anschließend durch zwei Strahlteiler (BS) auf vier räumliche Moden $a - d$ aufgeteilt. Als vier-Photonen Eingangszustand $|in\rangle$ wird dabei der Zustand:

$$|in\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}}(a_H^\dagger{}^2 c_V^\dagger{}^2 + 2a_H^\dagger a_V^\dagger c_H^\dagger c_V^\dagger + a_V^\dagger{}^2 c_H^\dagger{}^2)|0\rangle \quad (2.1)$$

angenommen

Mit einem $\lambda/2$ -Wellenplättchen¹ auf der Winkelposition ϕ , kann der Eingangszustand $|in\rangle$ transformiert werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{3}}(a_H^\dagger{}^2 (c_H^\dagger \sin(2\phi) - c_V^\dagger \cos(2\phi))^2 \\ + 2a_H^\dagger a_V^\dagger (c_H^\dagger \cos(2\phi) + c_V^\dagger \sin(2\phi)) \cdot (c_H^\dagger \sin(2\phi) - c_V^\dagger \cos(2\phi)) \\ + a_V^\dagger{}^2 (c_H^\dagger \cos(2\phi) + c_V^\dagger \sin(2\phi))^2)|0\rangle \quad (2.2) \end{aligned}$$

¹Die Matrizen der optischen Elemente sind zum Beispiel in [20] aufgeführt.

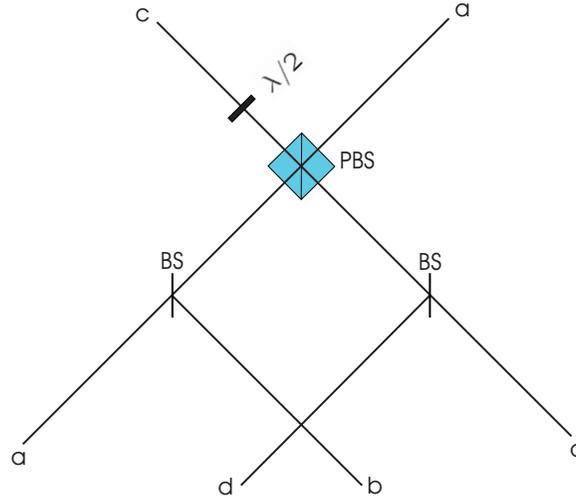


Abbildung 2.1: Der schematische Aufbau des Experiments, zur Beobachtung der Familie von Zuständen $|\psi(\phi)\rangle$.

Der resultierende Zustand nach kohärenter Überlagerung am Überlapp-PBS, enthält auch Terme mit drei oder vier Photonen in einer Mode a oder c . Beispiele hierfür sind:

$$\begin{array}{cc}
 a_h^\dagger{}^2 a_v^\dagger{}^2 & a_h^\dagger{}^2 a_v^\dagger{}^2 \\
 a_h^\dagger a_v^\dagger{}^2 c_h^\dagger & a_v^\dagger c_h^\dagger c_v^\dagger{}^2 \\
 \dots & \dots
 \end{array} \quad (2.3)$$

Da wir nur Koinzidenz-Ereignisse betrachten, bei denen ein Photon in jeder räumlichen Mode $a - d$ detektiert wird, können diese Terme im beobachteten Zustand $|\psi(\phi)\rangle$ keinen Beitrag liefern². Deshalb werden sie in der weiteren Rechnung nicht berücksichtigt. Durch die zwei BS werden die Photonen auf die räumlichen Moden $a - d$ aufgeteilt. Die Selektion der Koinzidenz-Ereignisse hat zur Folge, dass der Zustand $|\psi(\phi)\rangle$ nur mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner als eins aus dem Eingangszustand $|in\rangle$ hervorgehen kann. Der Zustand, der sich aus der Rechnung ergibt ist:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\psi}(\phi)\rangle = & \frac{1}{4\sqrt{3}}(2 \sin(2\phi)^2(|HHHH\rangle + |VVVV\rangle) \\
 & - (\cos(2\phi)^2 - \sin(2\phi)^2)(|HVHV\rangle + |HVVH\rangle + |VHHV\rangle + |VHVH\rangle) \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Den im Experiment beobachtbaren Zustand erhalten wir durch Normierung des Zustands

²Werden höhere Ordnungen der Photonenquelle mit berücksichtigt, können auch diese Terme einen Beitrag liefern.

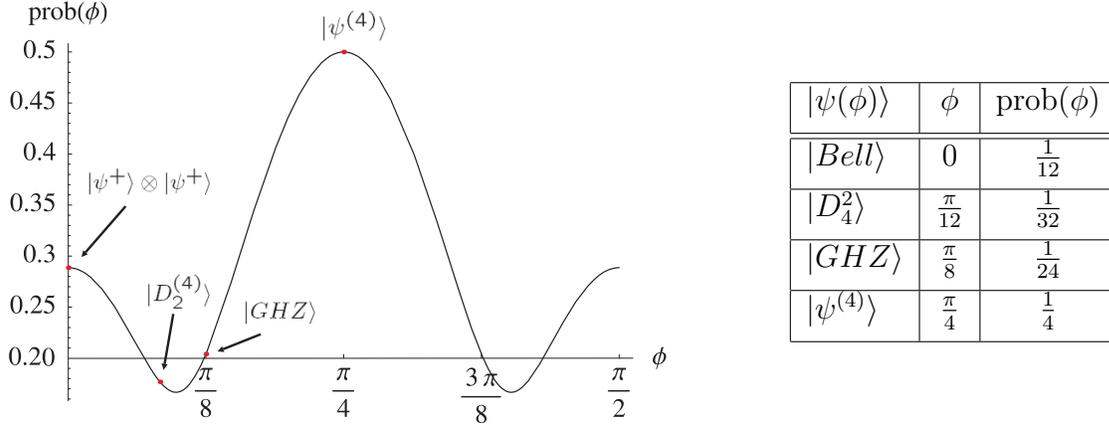


Abbildung 2.2: Beobachtungs-Wahrscheinlichkeit $\text{prob}(\phi)$ der Zustände $|\psi(\phi)\rangle$ in Abhängigkeit von der Winkelposition des $\lambda/2$ -Wellenplättchens.

$|\psi(\phi)\rangle$:

$$|\psi(\phi)\rangle = \frac{2\sqrt{2}\sin(2\phi)^2}{\sqrt{5 - 4\cos(4\phi) + 3\cos(8\phi)}}(|HHHH\rangle + |VVVV\rangle) - \frac{2\cos(4\phi)}{\sqrt{5 - 4\cos(4\phi) + 3\cos(8\phi)}}(|HVHV\rangle + |HV VH\rangle + |VHHV\rangle + |VHVH\rangle) \quad (2.5)$$

Für das Experiment ist die Zählrate, das heißt wie oft der Zustand $|\psi(\phi)\rangle$ pro Minute beobachtet werden kann, ein wichtiger Parameter. Zur Abschätzung der zu erwartenden Zählrate für einen Zustand $|\psi(\phi)\rangle$, wird die Beobachtungs-Wahrscheinlichkeit $\text{prob}(\phi)$ benötigt. Diese gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Zustand $|\psi(\phi)\rangle$ aus dem Eingangszustand $|in\rangle$ hervorgeht und berechnet sich somit aus:

$$\text{prob}(\phi) = \langle \tilde{\psi}(\phi) | \psi(\phi) \rangle^2 = \frac{1}{48}(5 - 4\cos(4\phi) + 3\cos(8\phi)) \quad (2.6)$$

Die Beobachtungs-Wahrscheinlichkeit $\text{prob}(\phi)$ wird in Abbildung 2.2 gezeigt. Das Maximum liegt bei $\phi = \frac{\pi}{4}$, bei dem der $|\psi^{(4)}\rangle$ -Zustand:

$$|\psi^{(4)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|HHHH\rangle + |VVVV\rangle) - \frac{1}{2\sqrt{3}}(|HVHV\rangle + |HV VH\rangle + |VHHV\rangle + |VHVH\rangle) \quad (2.7)$$

beobachtet werden kann. In der Tabelle (Abb. 2.2) sind die Winkelpositionen und die Beobachtungs-Wahrscheinlichkeit $\text{prob}(\phi)$ einiger bekannter Zustände, welche mit unserem Setup beobachtet werden können, aufgeführt.

Der mit unserem Versuchsaufbau beobachtbare Zustand $|\psi(\phi)\rangle$, kann als Superposition aus dem $|GHZ\rangle$ -Zustand und dem biseparablen Zustand $|\psi^+\rangle \otimes |\psi^+\rangle$ geschrieben werden

$$|\psi(\phi)\rangle = \frac{2\sqrt{2}\sin(2\phi)^2|GHZ\rangle - 2\cos(4\phi)|\psi^+\rangle \otimes |\psi^+\rangle}{\sqrt{5 - 4\cos(4\phi) + 3\cos(8\phi)}} \quad (2.8)$$

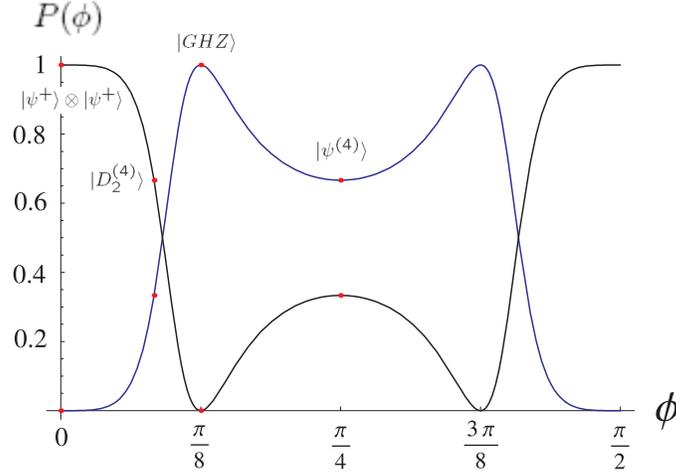


Abbildung 2.3: Betragsquadrate der Amplituden des $|GHZ\rangle$ -Anteils (blau) und des $|\psi^+\rangle \otimes |\psi^+\rangle$ -Anteils (schwarz) im Zustand $|\psi(\phi)\rangle$ in Abhängigkeit der Winkelposition der $\lambda/2$ -Wellenplättchens.

In Abbildung 2.3 sind die Betragsquadrate der Amplituden des $|GHZ\rangle$ -Anteils (blau) und des $|\psi^+\rangle \otimes |\psi^+\rangle$ -Anteils (schwarz) im Zustand $|\psi(\phi)\rangle$ dargestellt. Daraus ist zu erkennen, dass bei der Winkelposition $\phi = 0^\circ$ der $|GHZ\rangle$ -Anteil null ist und somit der separable Zustand $|\psi^+\rangle \otimes |\psi^+\rangle$ beobachtet werden kann. Für größer werdendes ϕ nimmt der $|GHZ\rangle$ -Anteil im Zustand zu und entsprechend der Beitrag des separablen Zustands ab. Bei $\phi = \frac{\pi}{8}$ ist der $|GHZ\rangle$ -Anteil maximal.

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen dem experimentellen Parameter ϕ und den Parametern $\{a, b, c, d\}$ der Klasse G_{abcd} (Gl.1.28) bestimmen. Dazu vergleichen wir die Amplituden des Repräsentanten der Klasse G_{abcd} mit dem allgemeinen, beobachtbaren Zustand $|\psi(\phi)\rangle$. Dadurch erhalten wir die folgenden Beziehungen:

$$\frac{a+d}{2} = \frac{2\sqrt{2}\sin(2\phi)^2}{\sqrt{5-4\cos(4\phi)+3\cos(8\phi)}}, \quad \frac{a-d}{2} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{b+c}{2} = \frac{b-c}{2} = \frac{2\cos(4\phi)}{\sqrt{5-4\cos(4\phi)+3\cos(8\phi)}}$$

Wird dieses Gleichungssystem gelöst, erhalten wir die Zusammenhänge:

$$a = d = \frac{2\sqrt{2}\sin(2\phi)^2}{\sqrt{5-4\cos(4\phi)+3\cos(8\phi)}}$$

$$b = \frac{4\cos(4\phi)}{\sqrt{5-4\cos(4\phi)+3\cos(8\phi)}} \quad (2.10)$$

$$c = 0$$

Durch einen weiteren Vergleich von Gleichungen (1.29) und (2.5) erhalten wir den Zusam-

menhang zwischen dem Parameter α mit dem experimentellen Parameter ϕ :

$$\alpha(\phi) = \frac{2\sqrt{2} \sin(2\phi)^2}{\sqrt{5 - 4 \cos(4\phi) + 3 \cos(8\phi)}} \quad (2.11)$$

Mit den Beziehungen aus den Gleichungen (2.10) und (2.11) wird die Flexibilität des Versuchsaufbaus sichtbar. Durch die frei wählbare Winkelposition ϕ des $\lambda/2$ -Wellenplättchens, kann der zu beobachtende Zustand $|\psi(\phi)\rangle$ ausgewählt werden.

Es stellt sich die Frage, ob die Familie von verschränkten Zuständen vergrößert werden kann, wenn weitere freie Parameter hinzugefügt werden; zum Beispiel durch weitere Wellenplättchen in den Eingangsmoden a und/oder c . Es zeigt sich allerdings, dass die Bedingung $c=0$ stets bestehen bleibt und somit die Menge der beobachtbaren Zustände dadurch nicht vergrößert werden kann.

2.2 Umsetzung und Justage des experimentellen Aufbaus

In Abbildung 2.4 ist der experimentelle Aufbau skizziert. Die zwei Hauptbestandteile sind die Photonenquelle und das lineare optische Netzwerk. Im Vergleich zum prinzipiellen Aufbau (Abb. 2.1), welcher im Zusammenhang mit der Berechnung der zu beobachtbaren Zustände $|\psi(\phi)\rangle$ gezeigt wurde, ist zu erkennen, dass wesentlich mehr optische Elemente benötigt werden. Diese sind nötig, da zur Charakterisierung des beobachteten Zustands eine Polarisationsanalyse (Abschnitt 2.2.4) erforderlich ist. Die Filter nach dem Überlapp-PBS werden benötigt, um die unterschiedlichen Spektren der $|H\rangle$ und $|V\rangle$ polarisierten Photonen aneinander anzugleichen und somit die Interferenz am Überlapp-PBS zu verbessern. Die Paare von YVO_4 -Kristallen nach dem Überlapp-PBS sowie nach den zwei Strahlteilern werden zur Kompensation einer Phase, die durch diese optischen Bauteile verursacht wird, benötigt.

2.2.1 Spontane parametrische Fluoreszenz

Als Quelle für den vier-Photonen Eingangszustand $|in\rangle$ wurde die zweite Ordnung der spontanen parametrischen Fluoreszenz (SPDC) [21] genutzt. Diese Methode zur Erzeugung von mehr Photonen Zuständen wurde in vielen Arbeiten untersucht [22, 23, 24] und bereits als Photonenquelle in zahlreichen Experimenten benutzt [6, 25]. Da die SPDC als Quelle eine zentrale Rolle des Experiments einnimmt, werden ihre Grundlagen in diesem Abschnitt kurz dargelegt.

Abbildung 2.5 zeigt einen schematischen Überblick der Quelle. Als Lasersystem wird ein gepulster und anschließend frequenzverdoppelter Ti:Sa Laser verwendet. Dieser emittiert Pulse mit einer Wiederholungsrate von $R=82\text{MHz}$ bei einer zentralen Wellenlänge von 390nm . Die mittlere Ausgangsleistung beträgt im UV 780mW . Als nicht linearer Kristall

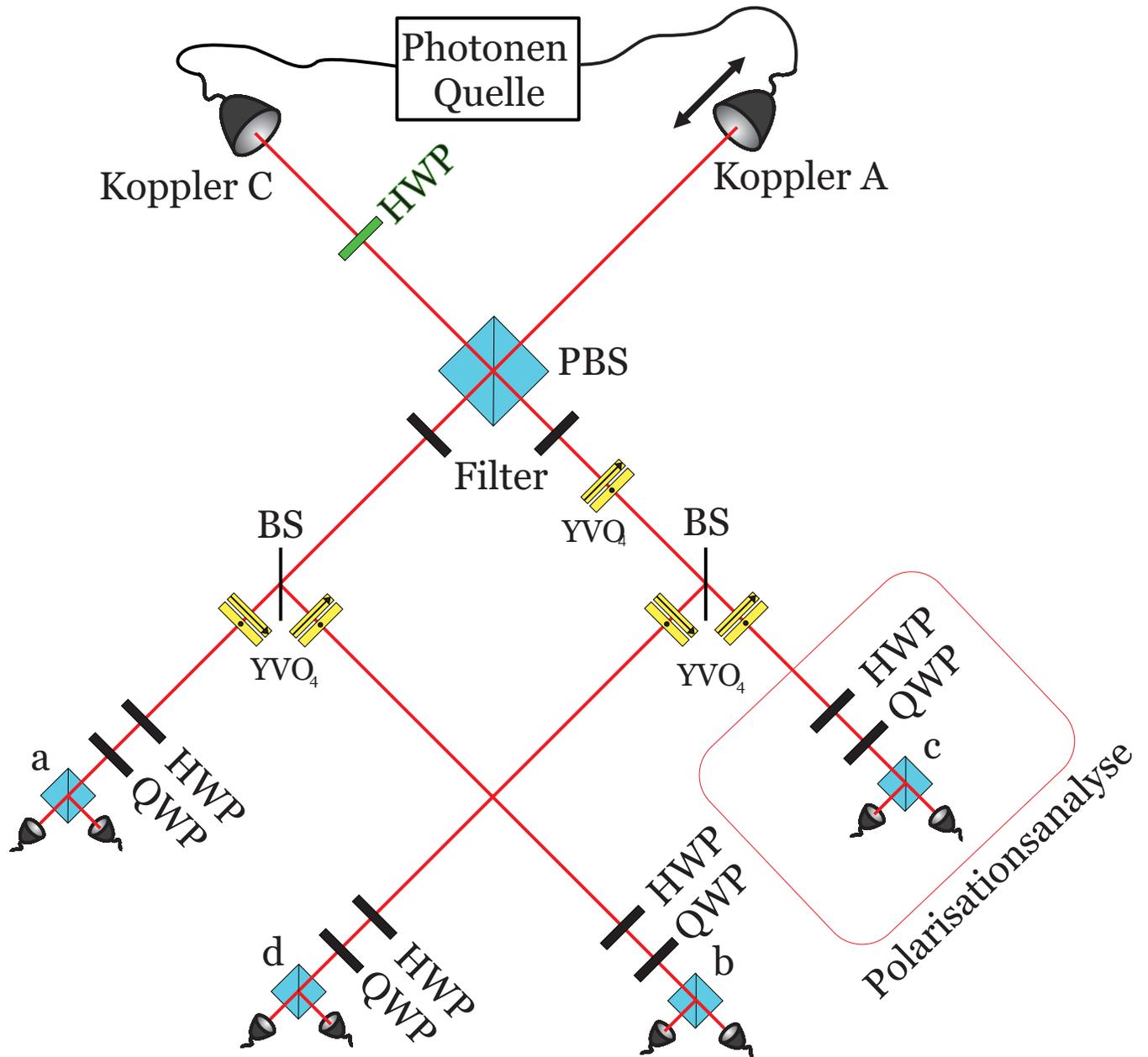


Abbildung 2.4: Skizze des gesamten experimentellen Aufbaus, bestehend aus Photonenquelle für den Eingangszustand $|in\rangle$ und dem optischen Netzwerk.

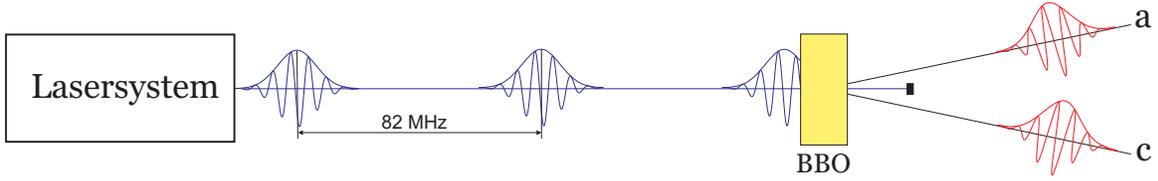


Abbildung 2.5: Skizze der Photonenquelle, bestehend aus einem Lasersystem und dem BBO-Kristall, zur Erzeugung des vier-Photonen Eingangszustands $|in\rangle$.

für die SPDC wurde ein 2mm dicker BBO-Kristall (β -Barium Borat) in der Typ-II Konfiguration verwendet.

SPDC ist ein nicht-linearer optischer Prozess in dem Pump-Photonen mit hoher Energie des Laserpulses in Photonen geringerer Energie umgewandelt werden. In diesem Prozess muss die sogenannte Phasenanpassung:

$$\sum_{i=1}^N \vec{k}_p^i = \sum_{j=1}^{N/2} \vec{k}_H^j + \sum_{k=1}^{N/2} \vec{k}_V^k \quad (2.12)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_p^i} = \sum_{j=1}^{N/2} \frac{1}{\lambda_H^j} + \sum_{k=1}^{N/2} \frac{1}{\lambda_V^k} \quad (2.13)$$

eingehalten werden, welche die Energie- und Impulserhaltung des Prozesses ausdrückt. Durch die Phasenanpassung sind die erzeugten Photonen nicht nur in Energie und Impuls sondern auch in ihrer Polarisation korreliert. Diese erzeugten Photonen, die entweder $|H\rangle$ oder $|V\rangle$ polarisiert sein können, werden je nach ihrer Polarisation, in einen der beiden kegelförmigen Raumbereiche emittiert (Abb. 2.6), wobei der Öffnungswinkel des Emissionskegels von der Wellenlänge der Photonen abhängig ist. Durch Verkippen der optischen Achse (OA) des BBO-Kristalls relativ zum Pumpstrahl, können die beiden Emissionskegel überlappt werden. Dadurch werden zwei Schnittgeraden definiert. Die entlang dieser beiden Schnittgeraden emittierten Photonen werden mit Hilfe zweier Koppler in Singlemode-Fasern eingekoppelt. Der Zustand $|SPDC\rangle$, der in diesem Prozess pro Pumpimpuls erzeugt wird ist:

$$|SPDC\rangle = \mathcal{N} \cdot e^{ic(a_H^\dagger c_V^\dagger + e^{i\delta} a_V^\dagger c_H^\dagger)} |0\rangle \quad (2.14)$$

Der Vorfaktor \mathcal{N} ist dabei die Normierungskonstante. Die Konstante c berechnet sich aus der Energie pro Pumpimpuls sowie der Nichtlinearität des BBO-Kristalls. Der c -Faktor wurde experimentell bestimmt und hat den Wert von $c = 0.068$. Aufgrund seiner Größenordnung wird eine Störungsentwicklung um diesen Parameter gerechtfertigt und wir erhalten dadurch:

$$|SPDC\rangle = \mathcal{N} \left(1 + c(a_H^\dagger c_V^\dagger + e^{i\delta} a_V^\dagger c_H^\dagger) + \frac{c^2}{2} (a_H^\dagger c_V^\dagger + e^{i\delta} a_V^\dagger c_H^\dagger)^2 + \mathcal{O}(c^3) \right) |0\rangle \quad (2.15)$$

Dieses Ergebnis kann folgendermaßen verstanden werden. Auf Grund der Tatsache, dass SPDC ein spontaner Prozess ist, werden nicht bei jedem Pumpimpuls der den Kristall passiert,

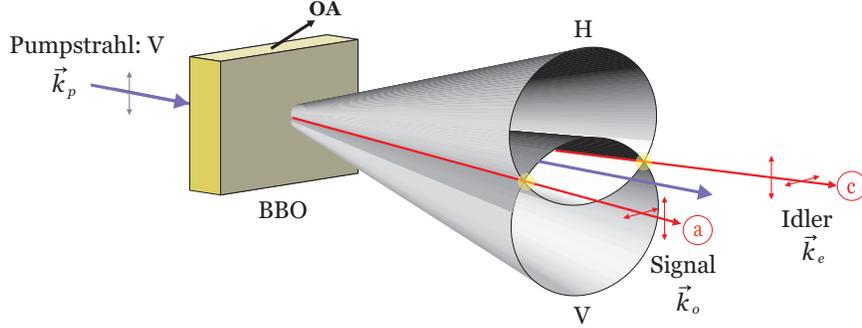


Abbildung 2.6: Die Abbildung zeigt eine schematische Darstellung der SPDC. Durch die zwei Schnittgeraden werden die Moden a und c definiert.

Photonen umgewandelt. Dies ergibt den Vakuumzustand, der dem ersten Term im Zustand $|SPDC\rangle$ entspricht. Der zweite Term entspricht der Umwandlung eines Pumpphotons, wodurch der in der Polarisation verschränkte zwei-Photonen Zustand entsteht:

$$|2\gamma\rangle = c \cdot \mathcal{N} \left(a_H^\dagger c_V^\dagger + e^{i\delta} a_V^\dagger c_H^\dagger \right) |0\rangle \quad (2.16)$$

Der dritte Term ist ein vier-Photonen Zustand, der bis auf eine Phase $e^{i\delta}$, dem für unser Experiment benötigten Eingangszustand entspricht:

$$|4\gamma\rangle = |\mathbf{in}\rangle = \frac{c^2 \cdot \mathcal{N}}{2} (a_H^\dagger c_V^\dagger + e^{i\delta} a_V^\dagger c_H^\dagger)^2 = \frac{c^2 \cdot \mathcal{N}}{2} (a_H^{\dagger 2} c_V^{\dagger 2} + 2e^{i\delta} a_H^\dagger a_V^\dagger c_H^\dagger c_V^\dagger + e^{2i\delta} a_V^{\dagger 2} c_H^{\dagger 2}) \quad (2.17)$$

Dabei werden zwei Pumpphotonen in einem gemeinsamen Prozess in vier Photonen umgewandelt. Die anderen Terme $\mathcal{O}(c^3)$ sind entsprechend mehr-Photonen Zustände.

Die Phase $e^{i\delta}$ wird mit Hilfe zweier BBO-Kristalle, die zur Kompensation des *longitudinalen walkoffs* [26] zwischen den $|H\rangle$ und $|V\rangle$ polarisierten Photonen benötigt werden, eingestellt. Somit ergibt sich der normierte Eingangszustand $|\mathbf{in}\rangle$:

$$|\mathbf{in}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} (a_H^{\dagger 2} c_V^{\dagger 2} + 2a_H^\dagger a_V^\dagger c_H^\dagger c_V^\dagger + a_V^{\dagger 2} c_H^{\dagger 2}) \quad (2.18)$$

Mit der aus Abschnitt 2.1 berechneten Beobachtungs-Wahrscheinlichkeit $prob(\phi)$, kann nun die zu erwartende Zählrate pro Minute für den Zustand $|\psi(\phi)\rangle$ grob abgeschätzt werden. Dafür müssen die experimentell bestimmten Detektoreffizienzen $c_{Det} = \frac{1}{3}$ (Abschnitt 2.2.4) sowie die Kopplungsgüte der Photonen $c_{Kop} = \frac{1}{3}$ berücksichtigt werden. Mit der Wiederholungsrate des Lasersystems von $R = 82 \cdot 10^6$ erwarten wir somit eine vierfach Zählrate von:

$$Z(\phi)_{|\psi(\phi)\rangle}^{th} = 60 \cdot R \cdot prob(\phi) \cdot 3c^4 \cdot c_{Det}^4 \cdot c_{Kop}^4 \quad (2.19)$$

$ \psi(\phi)\rangle$	$Z(\phi)_{ \psi(\phi)\rangle}^{th}/Min.$
$ Bell\rangle$	4
$ GHZ\rangle$	2
$ \psi^{(4)}\rangle$	12

2.2.2 Der Überlapp am polarisierenden Strahlteiler

Eine Voraussetzung um die Familie von Zuständen $|\psi(\phi)\rangle$ beobachten zu können, ist die kohärente Überlagerung der Photonen am Überlapp-PBS. Für die Interferenz müssen die Photonen aus den Moden a und c in allen ihren Freiheitsgraden, abgesehen von der Polarisation, ununterscheidbar sein. Die spektrale Ununterscheidbarkeit der Photonen wird nährungsweise durch zwei 3nm Filter nach dem Überlapp-PBS erreicht. Die räumliche Ununterscheidbarkeit wird durch eine genaue Justage der Moden a und c aufeinander erzielt, worauf wir später nochmal zurückkommen. Ein weiterer Freiheitsgrad ist die Ankunftszeit der Photonen am Überlapp-PBS. Für die Interferenz müssen die Photonen innerhalb ihrer Kohärenzzeit t_c gleichzeitig am Überlapp-PBS eintreffen. In wieweit diese Bedingungen experimentell gewährleistet werden können, wird im folgenden beschrieben.

Der Verschiebetisch und die Justage des Kopplers A:

Um eine gleichzeitige Ankunft der Photonen sicher zu stellen, wird die optische Weglänge in Mode a variabel gestaltet, indem der Faserkoppler A auf einen Verschiebetisch montiert wird. Da die Güte der Interferenz auch von der räumlichen Ununterscheidbarkeit der Photonen abhängt, darf sich die Strahlrichtung beim Verfahren des Koppler A nicht ändern. Somit muss der Kopplers A parallel zur Bewegungsrichtung des Verschiebetisches ausgerichtet werden. Dazu wird der von Koppler A ausgehende Justagestrahl³ mit einem weiteren Koppler K_1 in eine Multimode-Faser eingekoppelt. (Abb. 2.7 links). Zur Justage des Kopplers A parallel zur Bewegungsrichtung des Verschiebetisches wurde ein Iterationsverfahren verwendet (Abb. 2.7 rechts). Im Folgenden bezeichnen z_0 und z_1 die Positionen des Verschiebetisches und somit des Kopplers A. Die (x_i, y_i) Punkte beziehen sich auf die Position des Kopplers K_1 .

Zu Beginn des Iterationsverfahrens befindet sich der Koppler A auf der Position z_0 und Koppler K_1 auf der Position (x_0, y_0) . Durch Verfahren des Kopplers A von der Position z_0 auf z_1 entsteht ein Strahlversatz, wodurch die gekoppelte Intensität abfällt. Nur die x, y Position des Kopplers K_1 wird nun so nachgestellt, dass die gekoppelte Intensität ein Maximum erreicht, wodurch die neue Position (x_1, y_1) definiert wird. Im nächsten Schritt wird der Koppler A zurück auf die Position z_0 gefahren und die Richtungen der beiden Koppler werden aufeinander eingestellt, womit sich der neue Startpunkt für den nächsten Iterationsschritt ergibt.

Ändert sich die gekoppelte Intensität beim Verfahren des Verschiebetisches nur noch ge-

³Als Justagelaser wurde der Ti:Sa Laser verwendet.

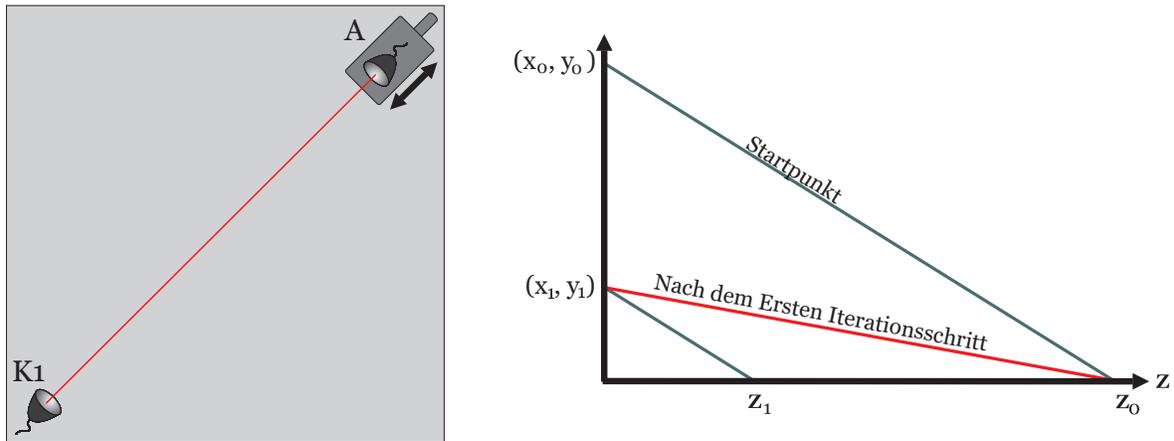


Abbildung 2.7: Veranschaulichung zur Justage des Kopplers A, parallel zur Bewegungsrichtung des Verschiebetisches unter Verwendung eines zweiten Kopplers K_1 .

ringförmig, so ist die Grobjustage beendet. Für die Feinjustage wird die Multimode-Faser durch eine Singlemode-Faser ersetzt und das Iterationsverfahren erneut durchlaufen. Da von einer Singlemode-Faser nur Licht aus einem kleinen Winkelbereich aufgesammelt werden kann, wird die räumliche Mode sehr genau definiert, wodurch die Richtung von Koppler A sehr genau eingestellt werden kann.

Abbildung (2.8) zeigt das Ergebnis der Justage. Hieraus wird ersichtlich, dass die Änderung der Intensität über den Bereich von $(0 \leq x \leq 1.8)$ cm kleiner als 1% ist. Somit kann

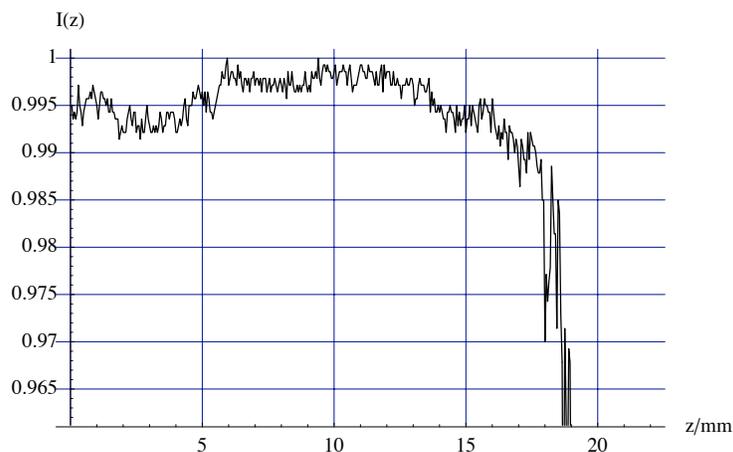


Abbildung 2.8: Gemessene Kopplungsgüte in Abhängigkeit der Position z des Verschiebetisches.

eine Wegdifferenz von 1.8 cm zwischen den Moden a und c kompensiert werden. Der abrupte Abfall in der gekoppelten Intensität ist durch einen Fehler im Verschiebetisch zu erklären. Durch die Justage des Kopplers A parallel zur Bewegungsrichtung des Verschiebetisches, ist die räumliche Mode a im Aufbau definiert. Es soll an dieser Stelle angemerkt werden,

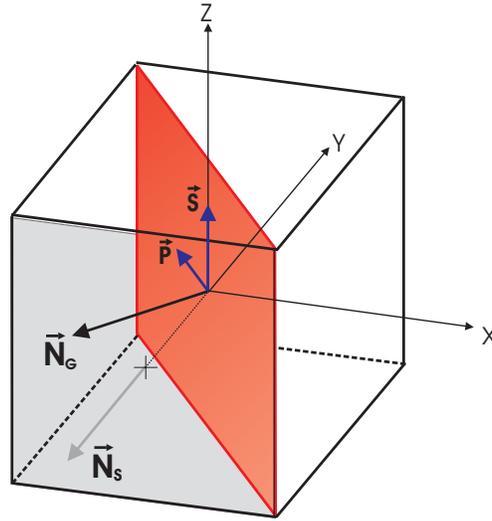


Abbildung 2.9: Koordinatensystem des Überlapp-PBS mit der rot hervorgehobenen dielektrischen Grenzschicht.

dass die resultierende Richtung des Strahls nicht parallel zum optischen Tisch ist, was bei der Justage des Überlapp PBS zu berücksichtigen ist.

Der Überlapp-PBS:

Der Überlapp-PBS ist das zentrale optische Element im Versuchsaufbau. Die Eigenschaften des Überlapp-PBS sind durch eine dielektrische Schicht, die als Grenzfläche in ihm enthalten ist, bestimmt. Durch die Eigenschaften der Grenzschicht, sind in dieser zwei Richtungen ausgezeichnet, die mit \vec{S} und \vec{P} bezeichnet werden (Abb. 2.9). Die Vektoren \vec{N}_G und \vec{N}_S sind entsprechend die Normalvektoren der Grenz- und Stirnfläche des Überlapp-PBS. Der Überlapp-PBS wirkt auf die Photonen als Projektor auf seine orthonormale Eigenbasis $|H_{PBS}\rangle/|V_{PBS}\rangle$, die durch die Vektoren \vec{S}/\vec{P} festgelegt wird. Die auf $|H_{PBS}\rangle$ projizierten Photonen werden dabei transmittiert die anderen reflektiert und sind somit räumlich voneinander getrennt. Durch diese räumliche Separation der Photonen definiert der Überlapp-PBS die horizontale $|H\rangle$ (vertikale $|V\rangle$) Referenz-Polarisation und somit die Basis des zweidimensionalen Hilbertraums \mathbb{H}_i der Qubits⁴:

$$\begin{aligned} |H\rangle &:= |H_{PBS}\rangle \\ |V\rangle &:= |V_{PBS}\rangle \end{aligned} \quad (2.20)$$

Da die Projektionsbasis des Überlapp-PBS durch die Vektoren \vec{S} und \vec{P} der Grenzfläche bestimmt wird, hängt die durch den Überlapp-PBS definierte Polarisation $|H_{PBS}\rangle/|V_{PBS}\rangle$ und somit die Basis des Hilbert Raums \mathbb{H}_i der Photonen, von der Orientierung des Überlapp-PBS im Raum ab. Als Bezugssystem wird dabei das Laborsystem, in dem der optische

⁴Dies ist äquivalent zur Definition von spin-up $|\uparrow\rangle$ und spin-down $|\downarrow\rangle$ in einem Stern-Gerlach Experiment durch die Orientierung der Messapparatur.

Tisch die xy -Ebene definiert, verwendet. In unserem Experiment wählen wir die Basis des Hilbert Raums \mathbb{H}_i so, dass die Polarisation $|V\rangle$ senkrecht zum optischen Tisch orientiert ist. Wie dies realisiert werden kann, soll nun besprochen werden.

Bezeichnet der Vektor \vec{k} die Ausbreitungsrichtung der Photonen in Mode a , so ergeben sich für die Justage des Überlapp-PBS die zwei Bedingungen:

$$\begin{aligned} \vec{S} &\perp \vec{k} \\ \vec{k} &\in E(\vec{P}, \vec{N}_G) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Hier bezeichnet $E(\vec{P}, \vec{N}_G)$ diejenige Ebene, welche von den beiden Vektoren \vec{P} und \vec{N}_G aufgespannt wird. Der Winkel γ zwischen den Vektoren \vec{N}_G und \vec{k} bleibt durch diese Bedingungen unbestimmt. Dieser Freiheitsgrad wird später genutzt um die Güte des Überlapp-PBS zu optimieren. Die Güte ist ein Maß dafür, wie gut der justierte Überlapp-PBS die orthogonalen Zustände $|H\rangle/|V\rangle$ eines Photons unterscheiden kann und somit räumlich trennt. Ist der Strahlverlauf parallel zum optischen Tisch, wird die erste Bedingung aus (2.21) erfüllt, indem der Überlapp-PBS so justiert wird, dass der an der Stirnfläche reflektierte Anteil des einfallenden Strahl parallel zum Tisch verläuft. Die zweite Bedingung wird erfüllt, indem der an der Grenzfläche des Überlapp-PBS reflektierte Strahl mit Wellenvektor \vec{k}_r^G , auch parallel zum optischen Tisch verläuft.

In unserem Experiment ist der Strahlverlauf der Mode a nicht parallel zum optischen Tisch, weshalb das obige Justageverfahren entsprechend modifiziert werden muss. Die Bedingungen (2.21) müssen dabei weiterhin erfüllt werden. Die erste Bedingung wird dadurch erfüllt, dass der an der Stirnfläche des Überlapp-PBS reflektierte Strahl den selben Winkel ϑ mit dem optischen Tisch einschließt wie der einfallende Strahl. Dies wurde erreicht, indem der Überlapp-PBS so verkippt wurde, dass der einfallende und der reflektierte Strahl im Abstand d_1 vom Überlapp-PBS die gleiche Höhe d_2 , vom optischen Tisch aus gemessen, haben. Die zweite Bedingung wird erfüllt, indem der an der Grenzfläche des Überlapp-PBS reflektierte Strahl auch den Winkel ϑ mit dem optischen Tisch einschließt. Der einfallende und der an der Grenzfläche reflektierte Strahl definierten nun die für den Versuchsaufbau relevante Bezugsebene E_{opt} . Wie oben bereits angesprochen, ist der Winkel γ , zwischen den Vektoren \vec{N}_G und \vec{k} , durch die Bedingungen (2.21) nicht festgelegt und kann zur Optimierung der Güte des Überlapp-PBS verwendet werden. Diese Optimierung und die Festlegung bzw. Definition der Polarisationsbasis $|H\rangle/|V\rangle$ im Versuchsaufbau durch den Überlapp-PBS, soll nun besprochen werden.

Zu Beginn wird der Überlapp-PBS so justiert, dass der an der Stirnfläche reflektierte Strahl in sich reflektiert wird. Nun wird ein Polarisator P_1 in der Mode a hinter dem Überlapp-PBS platziert (Abb. 2.10) und so eingestellt, dass die hinter P_1 mit Hilfe der CCD-Kamera beobachtete Intensität, ein Minimum erreicht. Damit erhalten wir einen $|V\rangle$ -Polarisator, der durch den Überlapp-PBS definiert ist. Ein zweiter Polarisator P_2 wird nun auf diesen orthogonal justiert, womit wir einen $|H\rangle$ -Polarisator, der ebenfalls durch den Überlapp-PBS definiert ist, erhalten. Die optimale Position des Überlapp-PBS zeichnet sich dadurch aus, dass bei ihr ein Minimum an Intensität in der reflektierten Mode c beobachtet wird, wenn

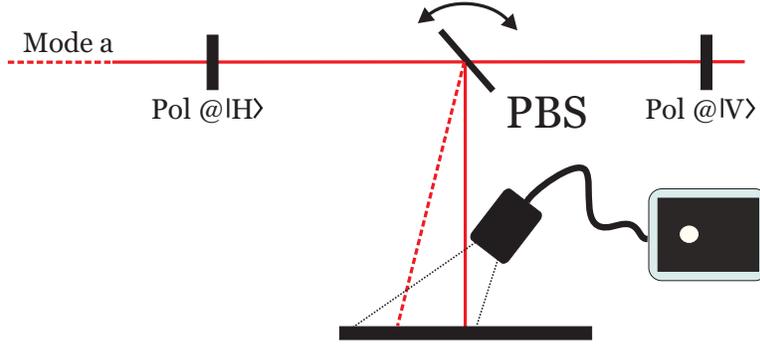


Abbildung 2.10: Veranschaulichung zur Justage des Überlapp-PBS.

$|H\rangle$ polarisiertes Licht analysiert wird. Somit kann die Güte des Überlapp-PBS optimiert werden, indem der vom Überlapp-PBS definierte $|H\rangle$ -Polarisator vor den Überlapp-PBS in Mode a gestellt und die Intensität in Mode c durch drehen des Überlapp-PBS um seine z -Achse minimiert wird. Jedoch wurde der $|V\rangle$ -Polarisator auf den Überlapp-PBS justiert, als sich dieser noch nicht in seiner optimalen Position befand, weshalb $|V\rangle$ polarisierte Photonen mit einer erhöhten Wahrscheinlichkeit transmittiert wurden. Somit wurde der $|V\rangle$ -Polarisator P_1 nicht orthogonal zu $|H_{PBS}\rangle$ eingestellt, sondern orthogonal zu:

$$|H'\rangle = a_H|H_{PBS}\rangle + a_V|V_{PBS}\rangle \quad (2.22)$$

In der jetzigen Position ist der Anteil a_V der $|V_{PBS}\rangle$ polarisierten Photonen in Mode a geringer und somit die Übereinstimmung mit der Polarisation $|H_{PBS}\rangle$ größer. Deshalb kann, durch iteratives Wiederholen der obigen Schritte, die Güte des Überlapp-PBS optimiert werden.

Nach der Justage des Überlapp-PBS wurde die Güte $G_{H/V}$ des Überlapp-PBS bestimmt. Diese berechnet sich aus dem Verhältniss der Intensitäten $I_{H/V}^0$ des eingehenden Laserstrahls mit definierter Polarisation $|H\rangle/|V\rangle$ und den Intensitäten $I_{V/H}$ in der entsprechenden Mode hinter dem Überlapp-PBS:

$$\begin{aligned} G_H &= \frac{I_V}{I_H^0} = (0.1 \pm 0.02)\%_0 \\ G_V &= \frac{I_H}{I_V^0} = (0.9 \pm 0.02)\%_0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Für die spätere Charakterisierung des Überlapps am PBS, wurde der am Überlapp-PBS reflektierte Strahl mit Hilfe des Kopplers K_2 in eine Singlemode-Faser eingekoppelt.

Mit der Positionierung des Überlapp-PBS im Strahlengang wird die Mode c im Aufbau definiert und somit auch die entgültige Position des Kopplers C vor dem Überlapp-PBS festgelegt. Um den Koppler C zu positionieren, wird die Strahlrichtung in Mode a mit Hilfe zweier Lochblenden markiert (Abb.2.11). Diese zwei Lochblenden werden als Hilfsmittel zur groben Positionierung des Kopplers C verwendet. Dazu wird zunächst der Justagelaser an den Koppler C angesteckt und dieser so platziert und justiert, dass der Laserstrahl durch die beiden Lochblenden trifft. Zur Feinjustage nutzen wir wieder die Tatsache, dass durch

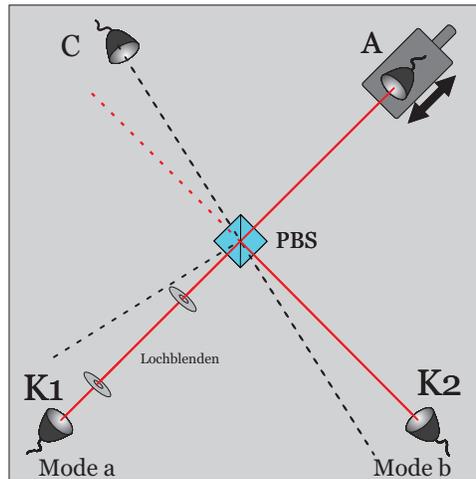


Abbildung 2.11: Positionierung des Kopplers C mit Hilfe zweier Lochblenden auf seine durch die Platzierung des Überlapp-PBS definierte Position.

eine Singlemode-Faser die räumliche Mode sehr genau definiert wird. Dadurch kann die Justage des Kopplers C verbessert werden, indem die in Koppler K_1 eingekoppelte Intensität, durch die Justage des Kopplers C, maximiert wird. Ist dies erreicht, ist die Justage des Überlapps mit Hilfe des Justagelasers beendet.

Die jetzige Position des Kopplers C ist der Startpunkt für die Justage mit der zwei-Photoneninterferenz am Überlapp-PBS, die wir in Abschnitt 2.3.1 besprechen werden. Dennoch wollen wir die Güte des Überlapps mit dem Justagelaser charakterisieren, um erste Informationen über die Güte des Überlapps zu erhalten.

Dazu betrachten wir ein Interferenzexperiment mit dem gepulsten Justagelaser (Abb. 2.12). Der Justagelaser wird dazu mit einem Faserstrahlteiler in zwei kohärente Strahlen aufgeteilt. Die zwei Ausgänge werden an den Koppler A und C angesteckt und die Intensität in Mode a hinter dem Überlapp-PBS wird in Abhängigkeit der Position z des Verschiebetisches aufgezeichnet. Aufgrund der Eigenschaften des Überlapp-PBS wird das einfallende Licht entweder auf $|H\rangle$ oder $|V\rangle$ projiziert und entsprechend transmittiert oder reflektiert. Somit ist der Anteil des Laserlichts in Mode a , welches vom Koppler A stammt orthogonal zum Anteil welches vom Koppler C stammt, wodurch keine Interferenz beobachtet werden kann. Durch die Polarisation der überlagerten Pulse kann im Nachhinein auch der zurückgelegte Weg der einzelnen Pulse bestimmt werden. In einem quantenmechanischen Bild können die zwei Möglichkeiten einen Puls in Mode a zu detektieren somit unterschieden werden, wodurch keine Interferenz auftreten kann. Um eine Interferenz am Überlapp-PBS dennoch zu ermöglichen, muss die zusätzliche Weg-Information unzugänglich gemacht (gelöscht) werden. Dies kann mit einem $|+\rangle$ -Polarisator in Mode a nach dem Überlapp-PBS erreicht werden.

Um nun die Qualität des Überlapps zu charakterisieren wird zunächst der Verschiebetisch in Schritten $\Delta z = 0.1\text{mm}$ verfahren. Dadurch erhalten wird die ungefähre Position

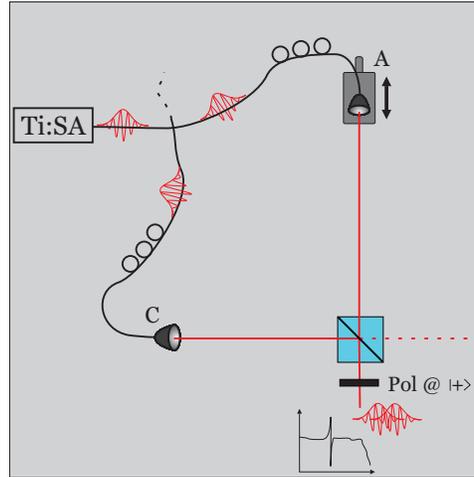


Abbildung 2.12: Zur Charakterisierung des Überlapps wird der Justagelaser mit einem Faserstrahlteiler in zwei kohärente Strahlen aufgeteilt. Der Kontrast des Interferenzmusters gibt dabei Aufschluss über die Güte des Überlapps.

\tilde{z}_I des Verschiebetisches, bei dem die Pulse innerhalb ihrer Kohärenzlänge gleichzeitig am Überlapp-PBS ankommen und interferieren (Abb. 2.13). Um diese Position \tilde{z}_I des Verschie-

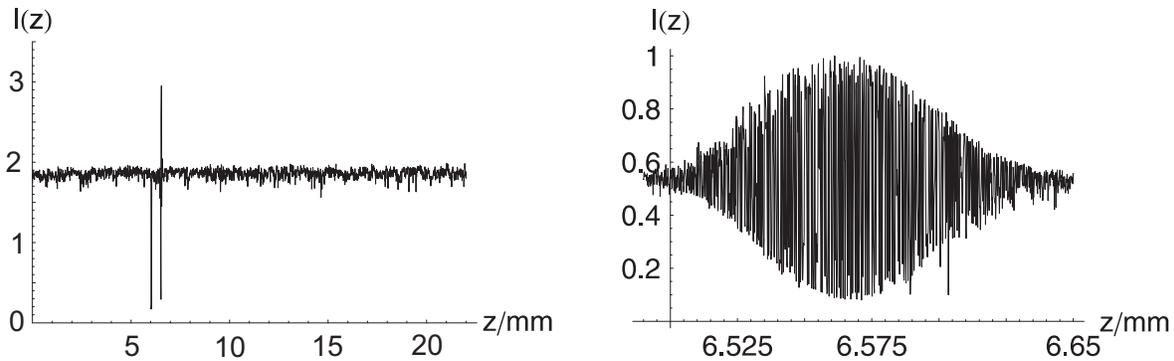


Abbildung 2.13: Ergebnisse eines groben und feinen Scans. Der Kontrast des beobachteten Interferenzmusters beträgt 82%.

betisches wird nun ein weiterer feiner Scan in Schritten von $\Delta z = 0.005\text{mm}$ durchgeführt. Das Ergebnis ist in Abbildung 2.13 dargestellt. Der Kontrast des Interferenzmusters berechnet sich aus:

$$K = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (2.24)$$

wobei $I_{max/min}$ der maximalen bzw. minimalen Intensität entspricht. Der somit berechnete Kontrast beträgt 82%.

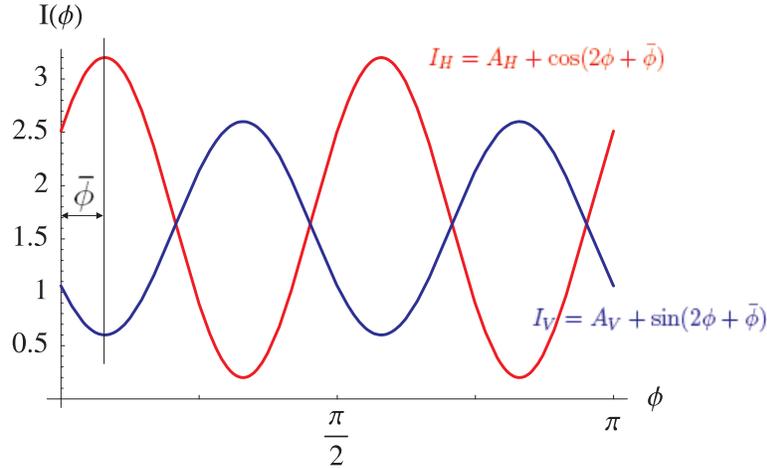


Abbildung 2.14: Die Abbildung zeigt die Intensitäten in den Moden a und c nach dem Überlapp-PBS in Abhängigkeit von der Winkelposition ϕ und des Offsets $\bar{\phi}$ des $\lambda/2$ -Wellenplättchens, bezogen auf die gesuchte Null-Position.

Justage des $\lambda/2$ -Wellenplättchens

In der Rechnung in Abschnitt 2.1 wurde gezeigt, dass der beobachtbare Zustand $|\psi(\phi)\rangle$ durch die Winkelposition des $\lambda/2$ -Wellenplättchens vor dem Überlapp-PBS bestimmt wird. Wegen diesem Zusammenhang ist eine exakte Kontrolle und Justage des $\lambda/2$ -Wellenplättchens wichtig. Aus diesem Grund wird das Wellenplättchen in einem motorisierten und computergesteuerten Halter montiert und in einem Testaufbau zunächst vorjustiert. Dazu wird das $\lambda/2$ -Wellenplättchen zwischen einem $|H\rangle$ und einem $|V\rangle$ -Polarisator platziert. Das transmittierte Licht wird durch eine CCD Kamera beobachtet, wobei als Lichtquelle eine Laserdiode verwendet wurde. Ohne das $\lambda/2$ -Wellenplättchen ist die von der CCD Kamera detektierte Intensität minimal. Durch das $\lambda/2$ -Wellenplättchen auf der Winkelposition ϕ , wird die durch den $|H\rangle$ Polarisator definierte Polarisation auf die Polarisation

$$|pol(\phi)\rangle = \cos(2\phi)|H\rangle + \sin(2\phi)|V\rangle \quad (2.25)$$

gedreht. Wegen des $|V\rangle$ -Polarisators hinter dem $\lambda/2$ -Wellenplättchen wird nur der $|V\rangle$ polarisierte Anteil transmittiert und von der CCD Kamera registriert. Somit ist die gesuchte Null-Position des Wellenplättchens durch ein Minimum in der Intensität nach dem $|V\rangle$ -Polarisator ausgezeichnet. Für die Feinjustage wird das Wellenplättchen auf seine endgültige Position in Mode c platziert⁵. Durch einen $|H\rangle$ -Polarisator vor dem Wellenplättchen wird die Eingangspolarisation definiert. Die Intensitäten in den Moden a und c nach dem Überlapp-PBS werden in Abhängigkeit von der Winkelposition des Wellenplättchens gemessen. Mit Gleichung (2.25) ergibt sich die Winkelabhängigkeit der gemessenen Intensitäten zu:

$$\begin{aligned} I_H &= A_H + \cos^2(2\phi + \bar{\phi}) \\ I_V &= A_V + \sin^2(2\phi + \bar{\phi}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

⁵Zur Justage kann entweder der Ti:Sa Laser oder die SPDC verwendet werden.

Dabei bezeichnet ϕ die Winkelposition des Wellenplättchens bezogen auf die gesuchte Null-Position und $\bar{\phi}$ den Offset von dieser Null-Position. Dies wird in Abbildung 2.14 veranschaulicht. Daraus lässt sich der Offset $\bar{\phi}$ des $\lambda/2$ -Wellenplättchens, von der gesuchten Null-Position bestimmen und somit kompensieren.

2.2.3 Die Strahlteiler

Durch die zwei Strahlteiler im Aufbau werden die Moden b und d definiert. Der theoretische Strahlteiler, wie er in der Rechnung in Abschnitt 2.1 angenommen wurde, hat ein polarisationsunabhängiges Aufteilungsverhältnis von $T/R = 1$. Hier bezeichnet T den transmittierten und R den am BS reflektierten Anteil des aufgeteilten Lichts. Die im Experiment verwendeten Strahlteiler weichen von dieser idealen Eigenschaft ab, können aber so justiert werden, dass zwar das Aufteilungsverhältnis vom idealen Wert $T/R = 1$ abweicht, aber dieses polarisationsunabhängig ist. Wir wollen kurz darauf eingehen, weshalb ein polarisationsunabhängiges Aufteilungsverhältnis für unser Experiment wichtig ist.

Wäre das Aufteilungsverhältnis polarisationsabhängig, würden die Photonen, entsprechend ihrer Polarisation, unsymmetrisch auf die Moden a und b (c und d) aufgeteilt werden. Dies hätte zum Beispiel⁶ zur Folge, dass mehr $|H\rangle$ polarisierte Photonen im reflektierten Arm des BS detektiert werden als $|V\rangle$ polarisierte Photonen. Dadurch würde die Amplitude des $|VHVH\rangle$ -Terms gegenüber dem $|HVVH\rangle$ -Term im Zustand $|\psi(\phi)\rangle$ vergrößert, wodurch ein anderer Zustand als der in Abschnitt 2.1 berechnete entsteht. Wird der BS auf ein polarisationsunabhängiges Aufteilungsverhältnis justiert, welches vom idealen Wert $T/R = 1$ abweicht, wird dadurch zwar die Beobachtung-Wahrscheinlichkeit des Zustands erniedrigt, jedoch nicht die Gewichtung der Terme innerhalb des Zustands beeinflusst.

Wie die beiden Strahlteiler auf ein polarisationsunabhängiges Aufteilungsverhältnis justiert wurden, soll nun erläutert werden. Als Startpunkt wird der Strahlteiler auf Rückreflex⁷ justiert (Abb. 2.15). Dies entspricht der Null-Position $\gamma = 0^\circ$ des BS. Der $|H\rangle$ -Polarisator vor dem BS definiert die Polarisation in der Eingangsmode i des BS, welche mit einem motorisierten $\lambda/2$ -Wellenplättchen in jede beliebige lineare Polarisation gedreht werden kann. Die Intensitäten S_T und S_R in der transmittierten und reflektierten Ausgangsmode des BS werden mit zwei Photodioden gemessen und deren Verhältnis $\frac{S_T}{S_R}$ am Oszilloskop dargestellt. Dieses Verhältnis entspricht dem Aufteilungsverhältnis des BS, welches somit direkt gemessen werden kann und durch Drehen um seine z-Achse⁸ verändert werden kann. Um das Aufteilungsverhältnis in Abhängigkeit der Polarisation zu untersuchen wird das $\lambda/2$ -Wellenplättchen vor dem BS gedreht und das Verhältniss $\frac{S_T}{S_R}$ beobachtet. Ist der BS noch nicht in der gewünschten polarisationsunabhängigen Position, oszilliert das Verhältniss $\frac{S_T}{S_R}$ in Abhängigkeit von der Winkelposition γ mit einer Amplitude $A(\gamma)$. Die optimale Position γ_{opt} des BS ist dadurch ausgezeichnet, dass bei ihr die resultierende Amplitude $A(\gamma)$ der Oszillation minimal ist: $A_{min} = A(\gamma_{opt}) \Rightarrow \gamma_{opt}$

⁶Dieses Beispiel hängt natürlich von der Justage des BS ab.

⁷Wird ein optisches Element auf Rückreflex justiert bedeutet dies, dass der an der Oberfläche des optischen Elements reflektierte Teil des Strahls in sich reflektiert wird.

⁸Das Koordinatensystem des BS entspricht dem eines PBS.

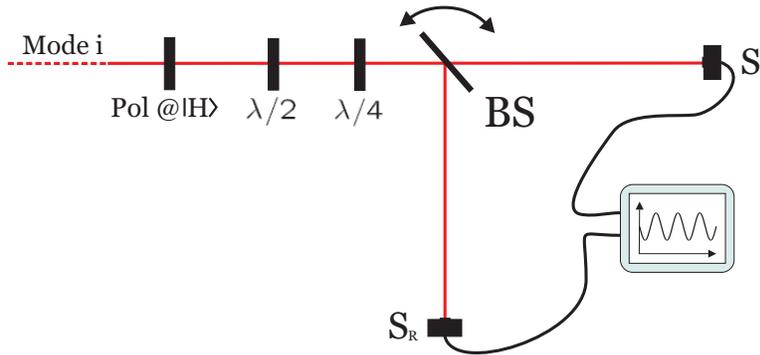


Abbildung 2.15: Das Aufteilungsverhältnis eines BS hängt von seiner relativen Orientierung zum Stahl ab.

Nach der Justage der beiden Stahlteile wurde das resultierende Aufteilungsverhältnis bestimmt. Die Ergebnisse sind in der nächsten Tabelle zusammengefasst.

	T:R	$\sigma_R/mean_R$	$\sigma_T/mean_T$
BS_{ab}	59:41	0.016	0.018
BS_{cd}	57:43	0.017	0.014

2.2.4 Polarisationsanalyse

Im Experiment werden wir die beobachteten Zustände durch lokale projektive Messungen der einzelnen Qubits charakterisieren. Die Information, die durch eine projektive Messung über das System erlangt wird, hängt von der Wahl des Projektors und somit von der Messbasis ab. In einem Multi-Photonen Experiment ist die Polarisationsanalyse das experimentelle Werkzeug diese Projektoren zu implementieren und somit den Multi-Photonen Zustand zu untersuchen. Abbildung 2.16 zeigt den Aufbau einer Polarisationsanalyse. Sie besteht aus einem $\lambda/2$ (HWP), $\lambda/4$ (QWP) Wellenplättchen und einen PBS sowie zwei Detektoren, die uns die Ergebnisse der Projektion liefern. Mit den zwei Wellenplättchen kann

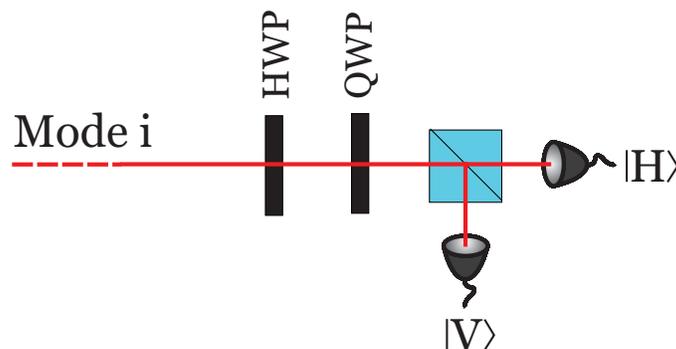


Abbildung 2.16: Der Aufbau einer Polarisationsanalyse, bestehend aus QWP, HWP einem PBS und zwei Detektoren, welche die Information über das Messergebnis liefern.

jede beliebige Messbasis $|\psi(\phi, \theta)\rangle/|\psi(\phi, \theta)\rangle_\perp$ gewählt werden [27]. Die Winkelposition ϕ ist die des HWP, θ die des QWP. Ein Photon im Polarisationszustand $|\gamma\rangle$, welches die Analyse erreicht, wird zuerst vom $\lambda/2$ - und anschließend vom $\lambda/4$ Wellenplättchen transformiert und letztlich durch den PBS auf die $|H\rangle/|V\rangle$ -Basis projiziert:

$$\begin{aligned} \hat{P}_H(U_{\lambda/4}(\theta)U_{\lambda/2}(\phi)|\gamma\rangle) \\ \hat{P}_V(U_{\lambda/4}(\theta)U_{\lambda/2}(\phi)|\gamma\rangle) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Die Gleichung (2.27) kann so umgeschrieben werden, dass die beiden Operatoren, welche zu dem HWP und QWP korrespondieren auf die Projektoren \hat{P}_H und \hat{P}_V wirken, anstatt auf den Zustand des Photons:

$$\begin{aligned} \hat{P}_H(U_{\lambda/2}(\theta)U_{\lambda/4}(\phi))|\gamma\rangle \\ \hat{P}_V(U_{\lambda/2}(\theta)U_{\lambda/4}(\phi))|\gamma\rangle \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dies kann reinterpretiert werden, indem die Operatoren aus Gleichung (2.28) in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \hat{P}_H(U_{\lambda/2}(\theta)U_{\lambda/4}(\phi)) &= |H\rangle\langle H|U_{\lambda/2}(\theta)U_{\lambda/4}(\phi) = |H\rangle\langle\psi(\phi, \theta)| \\ \hat{P}_V(U_{\lambda/2}(\theta)U_{\lambda/4}(\phi)) &= |V\rangle\langle V|U_{\lambda/2}(\theta)U_{\lambda/4}(\phi) = |V\rangle\langle\psi(\phi, \theta)_\perp| \end{aligned} \quad (2.29)$$

Somit wird ein Photon auf die orthogonalen Zustände $|\psi(\phi, \theta)\rangle/|\psi(\phi, \theta)\rangle_\perp$ projiziert und befindet sich danach in der Mode $|H\rangle/|V\rangle$ nach dem PBS. Die Detektoren liefern uns letztlich das Ergebnis der projektiven Messung.

Die Winkelpositionen der Polarisationsanalyse für die Standardbasen sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

	$\lambda/2: \phi$	$\lambda/4: \theta$
H/V	0°	0°
+/-	22.5°	0°
L/R	0°	45°

Die Verallgemeinerung von lokalen Projektoren für Multi-Photonen Zustände ist einfach, da jeder lokale Projektor eines Multi-Photonen Zustands als Matrixprodukt von lokalen ein-Qubit Projektoren geschrieben werden kann:

$$\hat{P}_{\psi_N} = |\psi_1(\phi_1, \theta_1)\rangle\langle\psi_1(\phi_1, \theta_1)| \otimes \cdots |\psi_i(\phi_i, \theta_i)\rangle\langle\psi_i(\phi_i, \theta_i)| \cdots \otimes |\psi_N(\phi_N, \theta_N)\rangle\langle\psi_N(\phi_N, \theta_N)| \quad (2.30)$$

Hier wird die Anzahl der Qubits mit N bezeichnet und (ϕ_i, θ_i) ist die Winkelposition der Polarisationsanalyse des i -ten Photons.

Um eine Multi-Photonen Korrelation zu messen, wird diese in lokale Projektoren auf einzelne Qubits zerlegt. Diese Projektoren werden mit der Polarisationsanalyse implementiert, indem die einzelnen Winkelpositionen (ϕ_i, θ_i) in den jeweiligen Ausgangsmoden $i - N$ entsprechend eingestellt werden (Gl. (2.29)).

Beim Aufbau der Polarisationsanalyse in unserem Setup ist zu beachten, dass durch den

Überlapp-PBS die Referenzpolarisation $|H\rangle$ und somit die dazu orthogonale Polarisation $|V\rangle$ definiert ist. Die Polarisationsanalyse muss deshalb auf diese Referenzpolarisation justiert werden. Dazu wird der PBS der Polarisationsanalyse zunächst auf Rückreflex justiert. Der durch den Überlapp-PBS definierte Polarisator wird nun vor dem PBS platziert, wodurch die Eingangspolarisation definiert ist. Durch Drehen des PBS um die z-Achse kann die Intensität in der reflektierten Mode wieder minimiert und somit die Güte des PBS optimiert werden. Im Vergleich zur Justage des Überlapp-PBS ist es bei dem PBS der Polarisationsanalyse nicht nötig, dass die Polarisationen in den Ausgangsmodes des PBS orthogonal zueinander sind. Der Grund hierfür ist aus Gl. (2.29) ersichtlich. Nach der Projektion auf die orthogonalen Zustände $|\psi(\phi, \theta)\rangle/|\psi(\phi, \theta)\rangle_\perp$ befindet sich das projizierte Photon entweder in der transmittierten oder reflektierten Mode. Da das Messergebnis einer projektiven Messung aus dem örtlichen Nachweis der Photonen entsteht, ist die Polarisation der Photonen nach der Projektion nicht relevant.

Die beiden Wellenplättchen der Polarisationsanalyse werden mit dem selben Justageverfahren justiert, welches auch für die Justage des $\lambda/2$ -Wellenplättchens vor dem Überlapp-PBS verwendet wurde. Mit der Polarisationsanalyse ist der Aufbau des Experiments abgeschlossen. Als letzten Punkt dieses Abschnitts wollen wir noch auf die Auswertung der Messdaten eingehen.

Bei der Auswertung der Messdaten muss berücksichtigt werden, dass die Detektoren verschiedene Effizienz η haben. Diese Tatsache verzerrt das Messergebnis und muss berücksichtigt werden. Dazu bestimmen wir die relativen Effizienzen der Detektoren. Zu diesem Zweck wird der $|H\rangle$ -Referenzpolarisator vor den PBS platziert, wodurch die Eingangspolarisation definiert wird⁹ und das $\lambda/2$ -Wellenplättchen in der Polarisationsanalyse wird nun gedreht. Dabei wird die definierte $|H\rangle$ Polarisation in Abhängigkeit der Winkelposition ϕ des HWP der Polarisationsanalyse gedreht:

$$|\text{pol}(\phi)\rangle = \cos(\phi)|H\rangle + \sin(\phi)|V\rangle \quad (2.31)$$

und somit das Aufteilungsverhältnis am PBS geändert. Die von den beiden Detektoren der Polarisationsanalyse gemessenen Intensitäten $I_{H/V}^i$ zeigen deshalb den Verlauf:

$$\begin{aligned} I_H^i &= D_H^i + A_H^i \cos^2(\phi_{\lambda/2}) \\ I_V^i &= D_V^i + A_V^i \sin^2(\phi_{\lambda/2}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

wobei sich der Index i auf die räumliche Mode i des Setups bezieht. $D_{H/V}^i$ ist die Dunkelzählrate des Detektors in der transmittierten bzw. reflektierten Mode des PBS und $A_{H/V}^i$ sind die Amplituden der Oszillationen. Der Verlauf einer solchen Messung, woraus die relevanten Messgrößen bestimmt werden können, ist in Abbildung 2.17 gezeigt. Aus den beiden Amplituden $A_{A/V}^i$ kann die relative Effizienz η_i der beiden Detektoren in Mode i berechnet werden:

$$\eta^i = \frac{A_V^i}{A_H^i} \quad (2.33)$$

⁹Zur Justage können entweder der Justagelaser oder die Photonen von der SPDC verwendet werden.

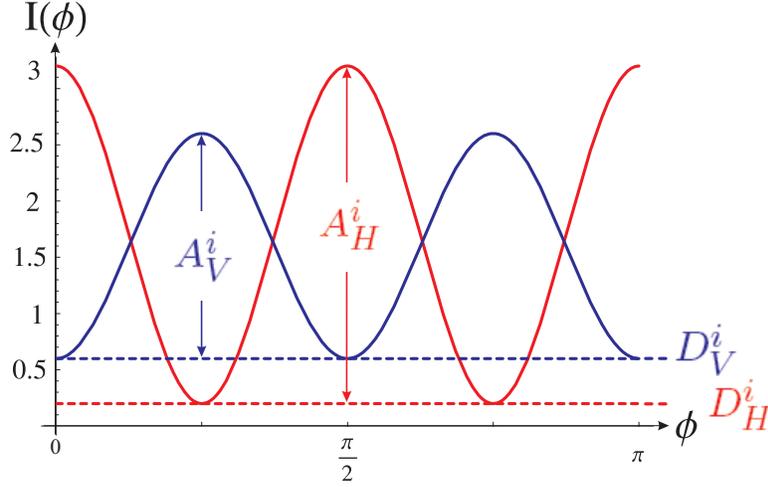


Abbildung 2.17: Veranschaulichung einer Effizienzmessung woraus die benötigten Parameter zur Berechnung der rel. Effizienzen η^i abgeleitet werden können.

Definiert man für die absolute Effizienz η_H^i der $|H\rangle$ -Detektoren in den Polarisationsanalysen $\eta_H^i = 1$, so erhalten wir:

$$\eta_H^i = 1 \Rightarrow \eta_V^i = \frac{A_V^i}{A_H^i} = \eta^i \quad (2.34)$$

Die effizienzkorrigierten Zählraten $c(a_j, b_k, c_l, d_m)$ der vier-Photonen Ereignisse können somit aus den gemessenen Zählraten $\tilde{c}(i_a, j_b, k_c, l_d)$ durch:

$$c(a_j, b_k, c_l, d_m) = \frac{\tilde{c}(i_a, j_b, k_c, l_d)}{\eta_j^a \cdot \eta_k^b \cdot \eta_l^c \cdot \eta_m^d} \quad (2.35)$$

berechnet werden. Die Indizes $\{j, k, l, m\}$ bezeichnen die zwei möglichen Ausgänge $|H\rangle/|V\rangle$ in den vier Polarisationsanalysen, welche entsprechend mit den Indizes $\{a, b, c, d\}$ der räumlichen Moden gekennzeichnet werden. Für die Bestimmung des Fehlers der effizienzkorrigierten Zählraten wurde eine Poisson-Verteilung der gemessenen Zählraten angenommen.

2.3 Charakterisierung des Überlapps mit der SPDC

Die Fidelity des experimentell beobachteten Zustands $|\psi(\phi)\rangle_{exp}$ an den theoretisch erwarteten Zustand $|\psi(\phi)\rangle_{th}$ hängt wesentlich von der Güte der Interferenz am Überlapp-PBS ab. Ein sorgfältiges Aufbauen und Justieren des Überlapps mit dem Justagelaser ist deshalb erforderlich. Um die Güte der Interferenz noch weiter zu verbessern, nutzen wir die zwei-Photonen Interferenz am Überlapp-PBS, wozu die erste Ordnung der SPDC (Gl. 2.16) verwendet wird. Bevor im nächsten Abschnitt auf die Justage und Charakterisierung des Setups mit der SPDC eingegangen wird, soll zunächst die Justage der Phase $e^{i\delta} = 1$ im erzeugten Ausgangszustand der SPDC (Gl. 2.15):

$$|SPDC\rangle = \mathcal{N}(1 + c(a_H^\dagger c_V^\dagger + e^{i\delta} a_V^\dagger c_H^\dagger) + \frac{c^2}{2}(a_H^\dagger c_V^\dagger + e^{i\delta} a_V^\dagger c_H^\dagger)^2 + \mathcal{O}(c^3))|0\rangle$$

mit Hilfe der beiden BBO-Kompensationskristalle besprochen werden.

Da die Photonenquelle über zwei Singlemode-Fasern mit dem Setup verbunden (Abb.2.4) ist, werden zunächst Fasern für $|H\rangle/|V\rangle$ polarisationserhaltend justiert. Zu diesem Zweck wird ein $|H\rangle$ -Polarisator vor einen Koppler, mit dessen Hilfe die Photonen der SPDC in die Phaser einkoppelt werden gestellt, während der andere abgedeckt wird. Die entsprechende Faser wird nun so justiert, dass in der reflektierten Mode des Überlapp-PBS ein Minimum an Photonen detektiert wird. Dasselbe Verfahren wird für die zweite Faser angewandt. Für die Justage der Phase $e^{i\delta}$ betrachten wir die erste Ordnung der SPDC (Gl. 2.16)

$$|2\gamma(\delta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_H^\dagger c_V^\dagger + e^{i\delta} a_V^\dagger c_H^\dagger) \quad (2.36)$$

Durch den doppelbrechenden Charakter der BBO-Kristalle entsteht eine relative Phase zwischen den $|H\rangle$ und $|V\rangle$ polarisierten Photonen, wenn diese die Kristalle passieren. Diese relative Phase hängt von dem relativen optischen Wegunterschied der Photonen in den Kristallen ab und kann somit durch Drehen der Kristalle um ihre vertikale Achse verändert werden. Um die gewünschte Phase von $e^{i\delta} = 1$ einzustellen, benötigen wir ein eindeutiges Kriterium, das zur Justage der beiden BBO-Kristalle verwendet werden kann. Dazu nutzen wir, dass der Überlapp-PBS als Teil einer Polarisationsanalyse, für die beiden Photonen aus Mode a und c , betrachtet werden kann. Mit dem $\lambda/2$ -Wellenplättchen in Mode c und einem weiteren in Mode a , können wir die beiden Photonen in jeder beliebigen linearen Polarisation analysieren (Abschnitt 2.2.4). Um die beiden Photonen unabhängig voneinander analysieren zu können, dürfen diese am Überlapp-PBS nicht interferieren und als Bedingung dafür, zeitversetzt am Überlapp-PBS eintreffen. Um ein Kriterium für die Justage zu erhalten, betrachten wir die Koinzidenzzählrate zwischen den Moden a und c . In der $\hat{\sigma}_z$ -Basis können die beiden Zustände ψ^+ und $|2\gamma(\delta)\rangle$ nicht unterschieden werden, weshalb wir den Zustand in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis analysieren. In der $\hat{\sigma}_x$ -Basis haben die zu unterscheidenden Zustände die Form:

$$\begin{aligned} |\psi^+\rangle_{+/-} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_+^\dagger c_+^\dagger + a_-^\dagger c_-^\dagger) \\ |2\gamma(\delta)\rangle_{+/-} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}((1 + e^{i\delta})a_+^\dagger c_+^\dagger + (-1 + e^{i\delta})a_+^\dagger c_-^\dagger + (1 - e^{i\delta})a_-^\dagger c_+^\dagger - (1 + e^{i\delta})a_-^\dagger c_-^\dagger) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Daraus ist zu erkennen, dass die Phase $e^{i\delta} = 1$ durch ein Maximum an $++$ Koinzidenzen zwischen den beiden Moden a und c ausgezeichnet ist. Das Maximum an Koinzidenzen ist nicht bekannt, weshalb dies für die Justage kein gutes Kriterium ist. Deshalb wird das $\lambda/2$ -Wellenplättchen in Mode a auf $\phi_a = -22.5^\circ$ gestellt. Dadurch werden die Rollen der Ausgangsmoden am Überlapp-PBS für das Photon in Mode a vertauscht. Dies hat zur Folge, dass zum Beispiel zwei $|+\rangle$ polarisierte Photonen stets in der selben Mode c hinter dem Überlapp-PBS detektiert werden. Dadurch ist die Phase $e^{i\delta} = 1$ durch ein Minimum an $++$ Koinzidenzen zwischen den Moden a und c ausgezeichnet.

Die SPDC ist somit justiert und wir erhalten in erster und zweiter Ordnung die Zustände:

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Ordnung: } |\psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_H^\dagger c_V^\dagger + a_V^\dagger c_H^\dagger) \\
 2. \text{ Ordnung: } |in\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(a_H^{\dagger 2} a_V^{\dagger 2} + 2a_H^\dagger a_V^\dagger c_H^\dagger c_V^\dagger + a_V^{\dagger 2} c_H^{\dagger 2})
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

2.3.1 Zwei-Photonen Interferenz

Um den räumlichen Überlapp zu verbessern, nutzen wir die zwei-Photonen Interferenz am Überlapp-PBS. Dazu wird das $\lambda/2$ -Wellenplättchen in Mode c auf die Winkelposition $\phi = 45^\circ$ eingestellt. Der Koppler A befindet sich in der Position z_D bei der die optischen Wegunterschiede in den beiden Moden kompensiert werden. Mit dem zwei-Photonen Eingangszustand $|\psi^+\rangle$ erhalten wir somit nach dem Überlapp-PBS den Zustand:

$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_H^1 c_H^2 - a_V^2 c_V^1) \tag{2.39}$$

Zur Übersichtlichkeit verwenden wir ab jetzt die vereinfachte Notation $\{a^\dagger, c^\dagger\} \rightarrow \{a, c\}$. Der Index $\{1, 2\}$ bezeichnet dabei die ursprüngliche räumliche Mode der Photonen $\{a, c\}$, wodurch eine räumliche Unterscheidbarkeit der beiden Photonen zum Ausdruck gebracht werden kann. Um einen Interferenzeffekt beobachten zu können, analysieren wir diesen Zustand in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(\mathbf{a}_+^1 \mathbf{c}_+^2 + a_+^1 c_-^2 + a_-^1 c_+^2 + \mathbf{a}_-^1 \mathbf{c}_-^2 - \mathbf{a}_+^2 \mathbf{c}_+^1 + a_+^2 c_-^1 + a_-^2 c_+^1 - \mathbf{a}_-^2 \mathbf{c}_-^1) \tag{2.40}$$

Sind die Photonen räumlich nicht zu unterscheiden, bleibt der Index $\{1, 2\}$ unberücksichtigt und die Amplituden der einzelnen Terme werden addiert und anschließend quadriert. Sind die Photonen durch den Index $\{1, 2\}$ unterscheidbar, ist der beobachtbare Zustand ein Gemisch aus den einzelnen Beiträgen und die Betragsquadrate der Amplituden müssen addiert werden. Dies ist in der nächsten Tabelle zusammengefasst.

$a^i c^j$	++	+ -	- +	--
$a^1 c^2$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$
$a^2 c^1$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$
inkohärent	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
kohärent	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Als Anhaltspunkt zur Justage des Überlapps können wir somit die $c(++)$ bzw. $c(--)$ Koinzidenzrate verwenden. Diese Zählraten werden mit zunehmender Qualität des Überlapps kleiner und sind somit Indikatoren für die Ununterscheidbarkeit der Photonen. Die Zählraten $c(+ -)$ und $c(- +)$ werden dabei maximal.

Zur Charakterisierung des Aufbaus mit Hilfe der zwei-Photonen Interferenz betrachten wir die Koinzidenzzählrate in Abhängigkeit der Position des Kopplers A. Dabei wird eine der Koinzidenzzählraten $c(++)$, $c(--)$, $c(+ -)$, $c(- +)$ in Abhängigkeit der Position z des Kopplers A (Abb. 2.18) aufgetragen. Ist der Wegunterschied in den Moden a und c größer

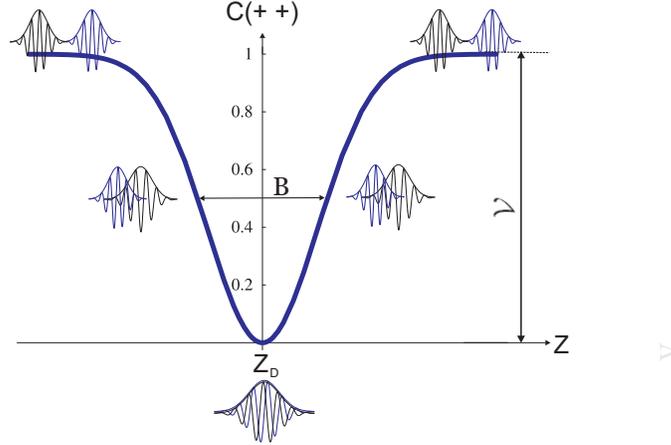


Abbildung 2.18: Theoretischer Verlauf der Koinzidenzzählrate $c(++)$ bzw. $c(--)$ in Abhängigkeit der Position z des Kopplers A.

als die Kohärenzlänge l_c der Photonen, interferieren diese am Überlapp-PBS nicht, da sie durch ihre unterschiedliche Ankunftszeit am Überlapp PBS unterscheidbar sind. Die Koinzidenzzählraten $c(+,+)$ und $c(-,-)$ ($c(+,-)$; $c(-,+)$) sind somit minimal (maximal) (Abb. 2.18; Gl. 2.45). Wird der Koppler A stückweise verfahren, reduziert sich der Wegunterschied zwischen den Moden a und c , wodurch der Überlapp der beiden Photonen größer wird. Folglich können die beiden Photonen nur noch partiell voneinander unterschieden werden und die Koinzidenzzählrate nimmt ab (zu). Wird die Position z_D erreicht, ist der Wegunterschied zwischen den Moden kompensiert. Somit erreichen die beiden Photonen den Überlapp-PBS gleichzeitig und können durch die Ankunftszeit nicht mehr unterschieden werden und die theoretisch erwartete Koinzidenzzählrate fällt auf null ab. Der zu erwartende Verlauf der Koinzidenzzählrate in Abhängigkeit der Position z des Verschiebetisches ist [28]:

$$c(i, i) = \text{const.} \cdot (1 \pm \mathcal{V} \cdot e^{-\left(\frac{z-z_D}{B}\right)^2}) \quad (2.41)$$

Das Plus gilt für die $c(+ -)/c(- +)$ Koinzidenzen, das Minus gilt für die $c(++)/c(--)$ Zählraten. Der Parameter B ist die *Full Width Half Maximum* (FWHM) der Funktion, welche mit der Kohärenzlänge l_c der Photonen zusammenhängt. Werden zwei Gaußsche Wellenpakete mit einem FWHM von l_c für die zwei interferierenden Photonen angenommen, kann die Kohärenzlänge l_c der beiden Photonen aus dem Parameter B berechnet werden:

$$l_c = \sqrt{2} B \quad (2.42)$$

Der Parameter \mathcal{V} ist die *Visibility*, welche den Abfall bzw. den Anstieg der Koinzidenzzählrate angibt und ein Maß für die Güte der Interferenz am Überlapp-PBS ist.

In Abbildung 2.21 wird das Ergebnis einer solchen Messung gezeigt. Die Visibilities be-

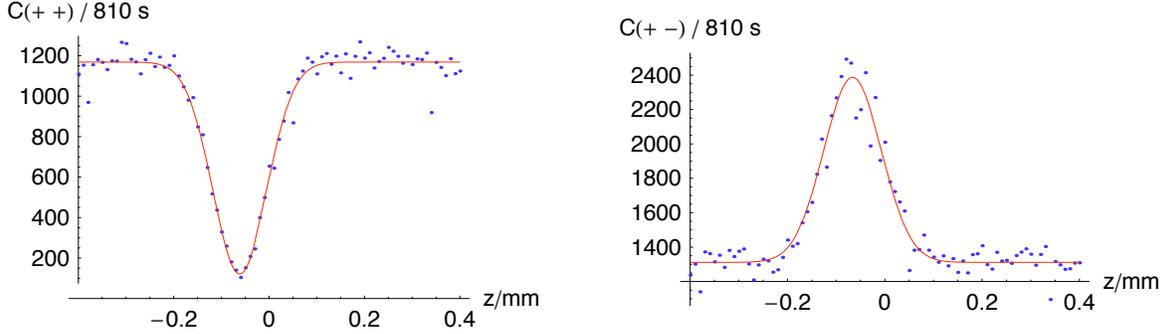


Abbildung 2.19: Das Ergebnis einer Messung für die Zählraten $c(++)$ und $c(+ -)$, mit einer Visibility von $\mathcal{V}^{+/+} = 0.896 \pm 0.019$ und $\mathcal{V}^{+/-} = 0.82 \pm 0.028$.

tragen $\mathcal{V}^{+/+} = 0.896 \pm 0.019$ und $\mathcal{V}^{+/-} = 0.82 \pm 0.028$. Eine Ursache für die Abweichung von der theoretisch erwarteten Visibility $\mathcal{V}_{th}^{i,j} = 1$ hat ihren Ursprung in einem effektiven Phasenschub $e^{i\alpha_{PBS}}$ zwischen den Polarisationen $|H\rangle$ und $|V\rangle$ in unterschiedlichen Moden, der vom Überlapp-PBS verursacht wird. Die Kompensation dieser Phase mit einem YVO_4 -Kristallpaar in Mode c nach dem PBS (Abb. 2.4) und somit die Verbesserung der Interferenz, soll kurz besprochen werden.

Die YVO_4 -Kristalle sind doppelbrechende Kristalle. Analog zu den BBO-Kompensationskristallen, kann durch Drehen dieser Kristalle um ihre vertikale Achse die optische Weglänge und somit der Phasenschub $e^{i\delta_{H/V}}$, den die Photonen in Abhängigkeit ihrer Polarisation beim Passieren des Kristalls erfahren, geändert werden [29]. Zur Herleitung einer Bedingung zur Justage der YVO_4 -Kristalle nehmen wir an, dass jedes Photon in Abhängigkeit der Eingangsmode a bzw. c einen polarisationsabhängigen Phasenschub $e^{iModePol}$ durch den Überlapp-PBS erfährt (Abb. 2.20). Gehen wir nun davon aus, dass der Überlapp gut

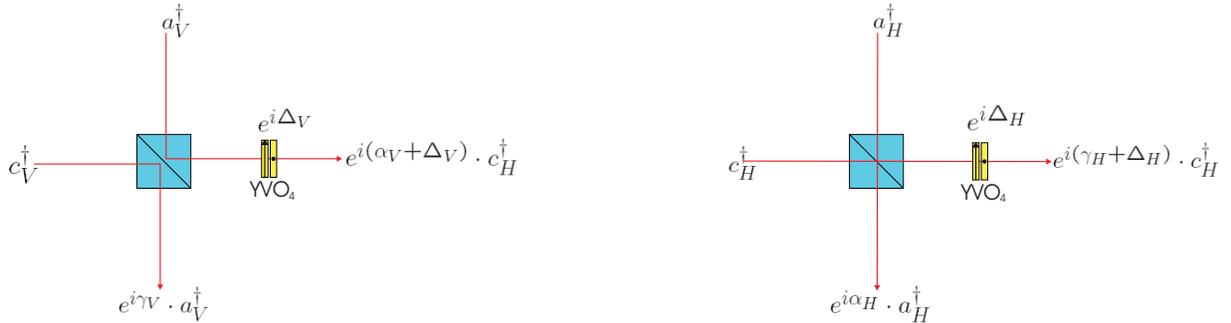


Abbildung 2.20: Darstellung der Phasenschübe $e^{iModePol}$ durch den Überlapp-PBS in Abhängigkeit von der Eingangsmode a , c und der Polarisation der Photonen.

justiert ist und berücksichtigen nur die Phasenschübe, erhalten wir statt des Zustands $|\phi^-\rangle$

aus Gl. (2.39) nach dem Überlapp-PBS den Zustand:

$$|\tilde{\psi}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\alpha_H} a_H e^{i\gamma_H} c_H - e^{i\alpha_V} a_V e^{i\gamma_V} c_V) \quad (2.43)$$

Mit der zusätzlichen, durch die YVO_4 -Kristalle justierbaren Phase $e^{i\Delta_{H/V}}$, erhalten wir bis auf eine vernachlässigbare globale Phase den Zustand:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(a_H c_H - e^{i(\alpha_{PBS} + \Delta_V - \Delta_H)} a_V c_V) \quad (2.44)$$

Dabei ist $e^{i\alpha_{PBS}}$, die durch den Überlapp-PBS verursachte effektive Phase, die es zu kompensieren gilt, wobei gilt: $\alpha_{PBS} = \alpha_V + \gamma_V - (\alpha_H + \gamma_H)$. Wird dieser Zustand in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis analysiert, erhalten wir:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(\mathbf{a}_+ \mathbf{c}_+ + a_+ c_- + a_- c_+ - e^{i(\alpha_{PBS} + \Delta_V - \Delta_H)} (\mathbf{a}_- \mathbf{c}_- - \mathbf{a}_+ \mathbf{c}_+ + a_+ c_- + a_- c_+ - \mathbf{a}_- \mathbf{c}_-)) \quad (2.45)$$

Somit haben wir ein Kriterium zur Kompensation der vom Überlapp PBS erzeugten Phase:

$$e^{i(\alpha_{PBS} + \Delta_V - \Delta_H)} = 1$$

Dies zeichnet sich im Experiment durch ein Minimum der $c(+ +)$ bzw. $c(- -)$ Koinzidenzzählrate aus. Abbildung 2.21 zeigt die Messung nachdem die effektive Phase $e^{i\alpha_{PBS}}$ des Überlapp-PBS kompensiert wurde. Die Visibility beträgt $\mathcal{V} = 0.92 \pm 0.047$ und die

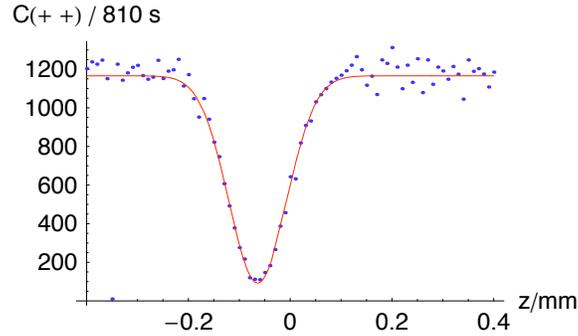


Abbildung 2.21: Ergebniss des der Messung für die Zählrate $c(+ +)$, nach der Kompensation der Phase $e^{i\alpha_{PBS}}$ des Überlapp PBS mit dem YVO_4 -Kristall-Paar. Die Visibility beträgt: $\mathcal{V} = 0.92 \pm 0.047$

aus dem Parameter B bestimmte Kohärenzlänge der Photonen λ_c beträgt $130 \pm 9 \mu\text{m}$. Der Grund weshalb die Zählrate nicht auf den theoretischen Wert von null abfällt, ist die bleibende Spektrale Unterscheidbarkeit der Photoen.

Mit der Justage des Überlapps mit Hilfe der zwei-Photonen Interferenz ist der Aufbau und die Justage des Experiments abgeschlossen. Wir werden nun für unseren Aufbau charakteristische Zustände aus der Familie von Zuständen auswählen und diese untersuchen.

Kapitel 3

Experimentelle Charakterisierung der beobachteten vier-Photonen Zustände

Mit unserem Setup können wir eine kontinuierliche Familie von Zuständen beobachten. In diesem Kapitel wollen wir deshalb drei exemplarische Zustände herausgreifen, die im folgenden motiviert werden sollen. Diese untersuchen wir mit den in Kapitel 1 vorgestellten Methoden. Wir legen den Fokus bei der Charakterisierung auf die Qualität der beobachteten Zustände und deren Verschränkung. Dabei werden die experimentellen Messdaten mit den theoretischen Vorhersagen verglichen.

3.1 Auswahl der Zustände

Zur Auswahl der Zustände, welche im Folgenden untersucht werden, betrachten wir die Familie von Zuständen die mit unserem Setup beobachtet werden können.

$$|\psi(\alpha)\rangle = \alpha|GHZ\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}|\psi^+\rangle_{ab}|\psi^+\rangle_{cd} \quad (3.1)$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $0 \leq \alpha \leq 1$

Durch den Parameter α sind somit zwei Zustände ausgezeichnet. Für $\alpha = 1$ können wir den verschränkten $|GHZ\rangle$ -Zustand:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HHHH\rangle + |VVVV\rangle) \quad (3.2)$$

beobachten.

Für den Parameterwert $\alpha = 0$ kann der biseparable Zustand:

$$|\psi^+\rangle_{ab} \otimes |\psi^+\rangle_{cd} = \frac{1}{2}(|HVVH\rangle + |VHVH\rangle + |HVVH\rangle + |VHHV\rangle) \quad (3.3)$$

beobachtet werden.

Für alle Zustände aus der Familie, ist die kohärente Überlagerung der Photonen am Überlapp-PBS eine Voraussetzung. Durch diese benötigte Überlagerung, ist der Überlapp-PBS das zentrale Element im Setup. Zu dessen Charakterisierung wählten wir deshalb als dritten Zustand den $|\psi^{(4)}\rangle$ -Zustand. Dieser hat die Form:

$$|\psi^{(4)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|HHHH\rangle + |VVVV\rangle) - \frac{1}{2\sqrt{3}} (|HVHV\rangle + |HVVH\rangle + |VHHV\rangle + |VHVH\rangle) \quad (3.4)$$

Der Grund weshalb dieser Zustand zur Charakterisierung des Überlapps verwendet wurde ist, dass wir nach Gleichung (2.19) für den $|\psi^{(4)}\rangle$ -Zustand die höchste Zählrate erwarten.

3.2 Der GHZ-Zustand

Beschreibung im Stabilizer Formalismus

Der $|GHZ\rangle$ -Zustand gehört zu der Klasse der *Graph States* [30], d.h. der Zustand kann durch einen zweidimensionalen Graphen dargestellt werden. Aufgrund dieser Zugehörigkeit, kann der $|GHZ\rangle$ -Zustand im *Stabilizer-Formalismus* [5] beschrieben werden. Wir wollen hier nur kurz auf die Idee der *Stabilizer Theorie* eingehen und einen speziellen Stabilizer Witness Operator vorstellen.

In der Stabilizer Theorie nutzt man, dass ein Zustand $|\psi\rangle$ eindeutig durch seine so genannten *Stabilizer Operatoren* \hat{S}_i festgelegt wird. Ein Operator \hat{S}_i ist dabei für einen Zustand $|\psi\rangle$ ein *Stabilizer* falls die Eigenwertgleichung:

$$\hat{S}_i |\psi\rangle = |\psi\rangle \quad (3.5)$$

erfüllt ist. Die Stabilizer des N-Qubit $|GHZ\rangle$ -Zustands sind [31]:

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 &= \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \\ \hat{S}_2 &= \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}} \\ \hat{S}_3 &= \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbf{1}} \\ \hat{S}_3 &= \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \end{aligned} \quad (3.6)$$

Wie in [31] gezeigt wurde, kann mit Hilfe der Stabilizer Operatoren ein Witness Operator $\hat{\mathcal{W}}_{GHZ}$ konstruiert werden, sowie der allgemeine Witness Operator $\hat{\mathcal{W}}_{allg}$ durch die Stabilizer dargestellt werden. Diese haben dabei die Form:

$$\hat{\mathcal{W}}_{GHZ} = 3 \hat{\mathbf{1}} - 2 \left[\frac{\hat{S}_1 + \hat{\mathbf{1}}}{2} + \prod_{i=2}^N \frac{\hat{S}_i + \hat{\mathbf{1}}}{2} \right] \quad (3.7)$$

$$\hat{\mathcal{W}}_{allg} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{1}} - |GHZ\rangle\langle GHZ| = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{1}} - \prod_{i=1}^N \frac{\hat{S}_i + \hat{\mathbf{1}}}{2} \quad (3.8)$$

Der experimentelle Vorteil des Witness Operators $\hat{\mathcal{W}}_{GHZ}$, im Vergleich zum allgemeinen Witness Operator (Gl. 1.40) ist, dass für diesen zum Nachweis von N-Qubit Verschränkung nur zwei Messsettings benötigt werden. Um dies zu sehen, schreiben wir den Witness Operator $\hat{\mathcal{W}}_{GHZ}$ in der Form:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}}_{GHZ} = & \frac{7}{4} \hat{\mathbb{1}} - \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_x \\ & - \frac{1}{4} (\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \hat{\mathbb{1}} \hat{\mathbb{1}} \hat{\sigma}_z + \hat{\mathbb{1}} \hat{\sigma}_z \hat{\mathbb{1}} \hat{\sigma}_z + \hat{\mathbb{1}} \hat{\mathbb{1}} \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \hat{\mathbb{1}} \hat{\sigma}_z \hat{\mathbb{1}} + \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_z \hat{\mathbb{1}} \hat{\mathbb{1}} + \hat{\mathbb{1}} \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_z \hat{\mathbb{1}}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Daraus ist zu erkennen, dass nur die zwei Messsettings:

$$\begin{aligned} & \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \\ & \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \end{aligned} \quad (3.10)$$

zum Nachweis der echten N-Qubit Verschränkung nötig sind, da die anderen Terme in Gl.(3.9) aus diesen beiden Messungen bestimmt werden können.

3.2.1 Qualität und Verschränkung

Wie aus der Rechnung in Abschnitt 2.1 folgt, kann für die Winkelposition $\phi = \frac{\pi}{8}$ des $\lambda/2$ -Wellenplättchens vor dem Überlapp-PBS, der $|GHZ\rangle$ -Zustand beobachtet werden. Im Experiment konnten wir für den $|GHZ\rangle$ -Zustand eine Zählrate von drei bis vier vierfach Koinzidenzen pro Minute beobachten. Die Messzeit pro Messsetting betrug 410 Minuten mit einer Gesamtzählrate von ca. 1400 vierfach Koinzidenzen. Der ideale vier-Qubit $|GHZ\rangle$ -Zustand in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis, hat die Form:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|HHHH\rangle + |VVVV\rangle) \quad (3.11)$$

Somit erwarten wir im Experiment nur Beiträge für die Zählraten $c(HHHH)$ und $c(VVVV)$. Das Resultat einer Messung in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Die roten Balken zeigen dabei die experimentellen Daten und die grauen Balken die Zählraten für einen idealen $|GHZ\rangle$ -Zustand. Die theoretischen Zählraten berechnen sich dabei aus der Gesamtzählrate, gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit das Ereignis für den idealen $|GHZ\rangle$ -Zustand zu beobachten. Die Korrelation K_{zzzz}^{exp} , gemessen in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis, beträgt 0.903 ± 0.030 , wobei der theoretische Wert $K_{zzzz}^{th} = 1$ ist.

Der vergleichsweise kleine Untergrund an Zählraten wie zum Beispiel $c(HHHV)$, entstehen aus den höheren Ordnungen der SPDC. Die zusätzlichen Zählraten $c(HVHV)$, $c(HVVH)$, $c(VHHV)$ $c(VHVV)$ entstehen durch eine partielle spektrale Unterscheidbarkeit der Photonen, sowie eine mögliche Abweichung von der optimalen Winkelposition des $\lambda/2$ -Wellenplättchens. Die räumliche Unterscheidbarkeit spielt in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis keine Rolle. Dies soll in einer Rechnung gezeigt werden.

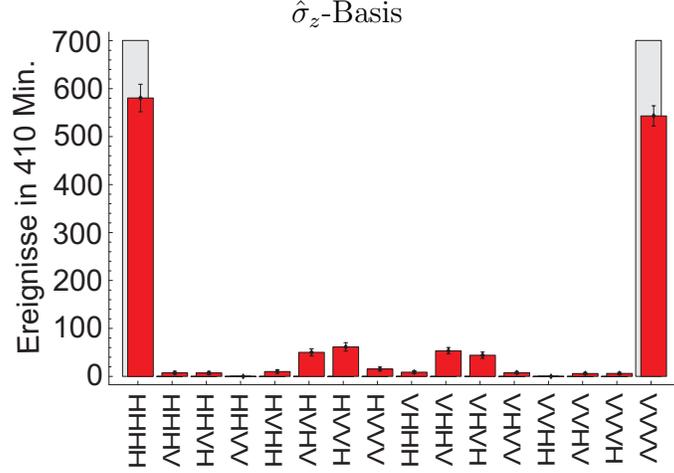


Abbildung 3.1: Vierfach koinzidenz Zählraten für den beobachteten Zustand (rot) im Vergleich mit den theoretisch erwarteten Zählraten (grau). Die Korrelation K_{zzzz}^{exp} beträgt dabei 0.903 ± 0.028 .

Um in der Rechnung die räumliche und spektrale Unterscheidbarkeit der Photonen zum Ausdruck zu bringen benutzen wir zwei zusätzliche Labels. Die ursprünglichen Moden $\{a, c\}$ der Photonen werden auseinander gehalten, indem die Photonen aus Mode c rot darstellen werden: $c \rightarrow \bar{c}$. Die spektrale Unterscheidbarkeit bringen wir zum Ausdruck, indem die $|V\rangle$ polarisierten Photonen ein weiteres Label erhalten: $c_V \rightarrow \bar{c}_V$. Dabei werden wir aus Gründen der Übersichtlichkeit die vereinfachte Schreibweise $a^\dagger \rightarrow a$ verwenden und den für diese Rechnung irrelevanten Normierungsfaktor $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ vernachlässigen. Daraus ergibt sich für den nicht normierten Eingangszustand $|\tilde{i}n\rangle$:

$$|\tilde{i}n\rangle = a_H^2 \bar{c}_V^2 + 2a_H \bar{a}_V c_H \bar{c}_V + \bar{a}_V^2 c_H^2$$

Das $\lambda/2$ -Wellenplättchen auf der Winkelposition $\phi = \frac{\pi}{8}$, transformiert diesen in:

$$a_H^2 (\bar{c}_H^2 - 2\bar{c}_H \bar{c}_V + \bar{c}_V^2) + 2a_H \bar{a}_V (c_H \bar{c}_H - c_H \bar{c}_V + \bar{c}_H c_V + c_V \bar{c}_V) + \bar{a}_V^2 (c_H^2 + 2c_H c_V + c_V^2)$$

wobei ein Faktor $\frac{1}{2}$ vernachlässigt wurde. Selektiert man die Terme welche zu einem vierfach Ereignis führen können, erhalten wir:

$$a_H^2 \bar{c}_H^2 + 2a_H \bar{a}_V \underbrace{(-c_H \bar{c}_V + \bar{c}_H c_V)}_{\text{Interferenz??}} + \bar{a}_V^2 c_V^2 \quad (3.12)$$

Sind die Photonen nur spektral unterscheidbar, aber räumlich ununterscheidbar: $\{c, \bar{c}\} \rightarrow \{c, \bar{c}\}$, ergibt sich:

$$a_H^2 \bar{c}_H^2 + 2a_H \bar{a}_V \underbrace{(-c_H \bar{c}_V + \bar{c}_H c_V)}_{\neq 0} + \bar{a}_V^2 c_V^2$$

und somit können wir Beiträge in den Zählraten $c(HVHV)$, $c(HV VH)$, $c(VHHV)$ $c(VH VH)$ beobachten.

Sind die Photonen nur räumlich unterscheidbar, aber spektral ununterscheidbar:

$\{\bar{a}, \bar{c}\} \rightarrow \{a, c\}$, folgt:

$$a_H^2 \bar{c}_H^2 + 2a_H a_V \underbrace{(-c_H c_V + c_H c_V)}_{=0} + \bar{a}_V^2 c_V^2$$

und somit spielt die räumliche Unterscheidbarkeit der Photonen in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis keine Rolle.

Um die Kohärenz zwischen den einzelnen Beiträgen im beobachteten Zustand zu untersuchen, betrachten wir eine Messung in der $\hat{\sigma}_x$ und $\hat{\sigma}_y$ -Basis. Die Resultate dieser beiden Messungen sind in den Abbildungen 3.2 dargestellt. Die Korrelation in diesen beiden Basen

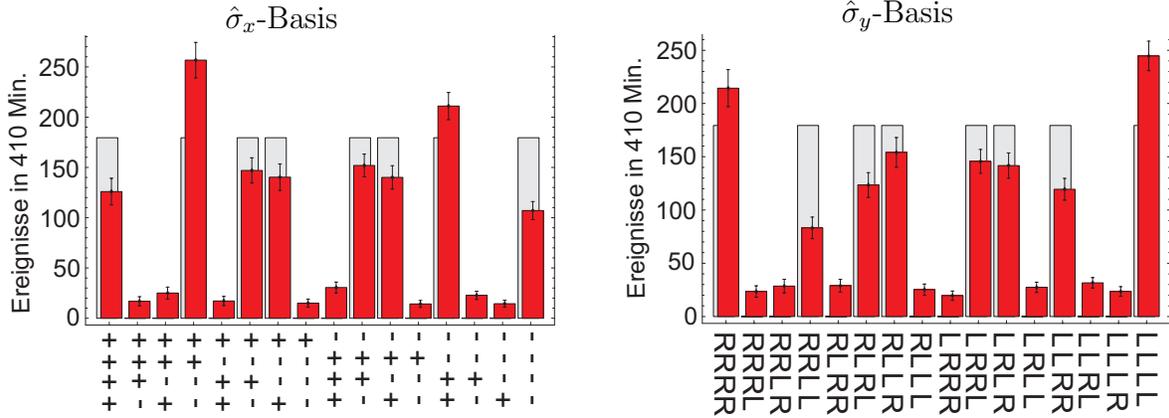


Abbildung 3.2: Messergebnisse (rot) für den beobachteten Zustand, analysiert in der $\hat{\sigma}_x$ und $\hat{\sigma}_y$ -Basis. Die Korrelationen betragen dabei $K_{xxxx}^{exp} = 0.783 \pm 0.027$ und $K_{yyyy}^{exp} = 0.710 \pm 0.027$.

sind $K_{xxxx}^{exp} = 0.783 \pm 0.027$ und $K_{yyyy}^{exp} = 0.710 \pm 0.027$. Für einen idealen $|GHZ\rangle$ -Zustand sind diese Korrelationen jeweils eins. Die Messungen in den Standardbasen weisen somit auf eine Kohärenz zwischen den beiden Termen im beobachteten Zustand hin. Vergleicht man die Korrelationen in den Standardbasen fällt auf, dass die Korrelation in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis um ca. 20% höher ist. Der Grund dafür ist die räumliche Unterscheidbarkeit der Photonen, welche in den Messbasen $\hat{\sigma}_x$ und $\hat{\sigma}_y$ relevant wird.

Um zu quantifizieren, mit welcher Güte der vier-Qubit $|GHZ\rangle$ -Zustand mit unserem Setup beobachtet werden kann, bestimmen wir die Fidelity des Zustands an den idealen $|GHZ\rangle$ -Zustand. Wie in Abschnitt 1.5.1 begründet, müssen dazu nur die Korrelationen bestimmt werden, welche für den idealen $|GHZ\rangle$ -Zustand ungleich null sind. Zur experimentellen Bestimmung dieser sechzehn Korrelationen werden neun Messsettings benötigt. Die sechzehn Korrelationen sind zusammen mit den experimentell bestimmten Werten in der Tabelle 3.1 zusammengefasst. Die ersten neun Korrelationen in dieser Tabelle, sind die neun benötigten Messsettings, die übrigen sieben können von diesen abgeleitet werden.

Korrelation K_{ijkl}	Erwartungswert: a_{ijkl}^{exp}	a_{ijkl}^{th}
$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x$	0.782 ± 0.027	1
$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y$	-0.641 ± 0.027	-1
$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y$	-0.644 ± 0.027	-1
$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x$	-0.653 ± 0.027	-1
$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y$	0.710 ± 0.028	1
$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y$	-0.663 ± 0.0027	-1
$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x$	-0.677 ± 0.027	-1
$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x$	-0.560 ± 0.028	-1
$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$	0.903 ± 0.028	1
$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z$	0.812 ± 0.028	1
$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}}$	0.783 ± 0.028	1
$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}$	0.642 ± 0.028	1
$\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}$	1.000 ± 0.009	1
$\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$	0.664 ± 0.028	1
$\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z$	0.792 ± 0.028	1
$\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}}$	0.821 ± 0.028	1

Tabelle 3.1: Liste der Korrelationen, welche in die Berechnung der Fidelity $\mathcal{F}(|GHZ\rangle, \rho_{exp})$ eingehen.

Zur Berechnung der Fidelity setzen wir die entsprechenden Werte aus Tabelle 3.3 in Gleichung (1.35) ein und erhalten als Resultat:

$$\mathcal{F}(|\psi_{th}\rangle, \hat{\rho}_{exp}) = \frac{1}{16} \sum_{i,j,k,l} a_{ijkl}^{exp} a_{ijkl}^{th} = 0.733 \pm 0.007 \quad (3.13)$$

Zum Nachweis der vier-Qubit Verschränkung im beobachteten Zustand, betrachten wir die Erwartungswerte der Witness Operatoren $\hat{\mathcal{W}}_{GHZ}$, $\hat{\mathcal{W}}_{allg}$ und erhalten mit den Erwartungswerten der Stabilizer aus Tabelle 3.1:

$\hat{\mathcal{W}}_i$	$\langle \hat{\mathcal{W}}_i \rangle_{th}$	$\langle \hat{\mathcal{W}}_i \rangle_{exp}$
$\hat{\mathcal{W}}_{GHZ}$	-1.0	-0.387 ± 0.068
$\hat{\mathcal{W}}_{allg}$	-0.5	-0.233 ± 0.007

Der beobachtete Zustand ist somit durch die beiden Witness Operatoren als vier-Photonen verschränkter Zustand nachgewiesen.

Diese beiden Ergebnisse sind erste Bestätigungen dafür, dass der beobachtete Zustand einem $|GHZ\rangle$ -Zustand entspricht. Im weiteren soll mit Hilfe einer Korrelationsfunktion der beobachtete Zustand auf eine weitere Eigenschaft des $|GHZ\rangle$ -Zustands untersucht werden.

3.2.2 Korrelationsfunktion

Zur weiteren Charakterisierung des beobachteten Zustands betrachten wir die Korrelationsfunktion $\hat{\Omega}(\gamma)$:

$$\hat{\Omega}(\gamma) = \hat{\sigma}_\gamma \otimes \hat{\sigma}_\gamma \otimes \hat{\sigma}_\gamma \otimes \hat{\sigma}_\gamma \quad (3.14)$$

mit $\hat{\sigma}_\gamma = \cos(\gamma)\hat{\sigma}_y + \sin(\gamma)\hat{\sigma}_x$

Der Erwartungswert der Korrelationsfunktion $\hat{\Omega}(\gamma)$ gibt die Korrelation der Photonen in der $\hat{\sigma}_\gamma$ -Basis an. Diese Menge von Basen liegt auf dem Großkreis $|R\rangle \rightarrow |+\rangle \rightarrow |L\rangle \rightarrow |-\rangle \rightarrow |R\rangle$ und wurde im Abschnitt 1.1 bereits eingeführt.

Um Aufschluß darüber zu erhalten, welche Information wir mit Hilfe der Korrelationsfunktion über den beobachteten Zustand erhalten können, betrachten wir den Erwartungswert der Korrelationsfunktion $\hat{\Omega}(\gamma)$ mit einer allgemeinen physikalischen Dichtematrix $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho}_{i,j} = a_{i,j} e^{i\theta_{i,j}}, \quad a_{i,j}, \theta_{i,j} \in \mathbb{R}, \quad i, j \in 1, 2, \dots, 16$$

$$\hat{\rho} \text{ ist physikalische Dichtematrix } \iff a_{i,j} = a_{j,i} \ ; \ \theta_{i,j} = \theta_{j,i} \ \text{ und } \text{Tr}[\hat{\rho}] = 1 \quad (3.15)$$

$$\text{mit: } 1 \hat{=} \text{HHHH}, 2 \hat{=} \text{HHHV}, \dots, 15 \hat{=} \text{VVVH}, 16 \hat{=} \text{VVVV}$$

wodurch wir folgenden Ausdruck erhalten:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Omega} \rangle = & 2[a_{16,1} \cos(4\gamma + \theta_{16,1}) + a_{15,2} \cos(2\gamma + \theta_{15,2}) + a_{14,3} \cos(2\gamma + \theta_{14,3}) \\ & + a_{12,5} \cos(2\gamma + \theta_{12,5}) + a_{9,8} \cos(2\gamma + \theta_{9,8}) + a_{13,4} \cos(\theta_{13,4}) \\ & + a_{11,4} \cos(\theta_{11,4}) + a_{10,7} \cos(\theta_{10,7})] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Daraus ist zu erkennen, dass nur nicht diagonal Elemente der Dichtematrix $\hat{\rho}$, die in diesem Zusammenhang mit Kohärenzen bezeichnet werden, zum Erwartungswert der Korrelationsfunktion beitragen.

Dabei ist $a_{16,1}$ die Kohärenz zwischen den Termen $|HHHH\rangle$ und $|VVVV\rangle$ und entsteht somit aus dem $|GHZ\rangle$ -Anteil im Zustand $\hat{\rho}$. Der $|GHZ\rangle$ -Anteil im Zustand $\hat{\rho}$ ist der einzige, welcher auf eine Oszillation mit einer 4γ -Abhängigkeit führt. Somit ist der $|GHZ\rangle$ -Zustand durch dieses Verhalten ausgezeichnet und die Korrelationsfunktion kann zum Nachweis der Beobachtung eines $|GHZ\rangle$ -Zustands herangezogen werden [32, 33].

Die Beiträge, die eine 2γ -Abhängigkeit zeigen, entstehen aus den Anteilen im Zustand, die sich als $|GHZ\rangle$ -Zustand mit einem Spinflip $|H\rangle \Leftrightarrow |V\rangle$ auf ein beliebiges Photon darstellen lassen. Ein Beispiel dafür ist:

$$|GHZ\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HHVH\rangle + |VVHV\rangle) \quad (3.17)$$

Der Index bezieht sich dabei auf das geflipte Qubit.

Die Konstanten Beiträge im Erwartungswert sind Kohärenzen zwischen den Beiträgen im Zustand, die sich als $|GHZ\rangle$ -Zustand mit zwei Spinflips auf beliebige Qubits darstellen lassen. Ein Beispiel für einen $|GHZ\rangle$ -Zustand mit einem Spinflip auf die Photonen in Moden a und c ist:

$$|GHZ\rangle_{ac} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|VHVH\rangle + |HVHV\rangle) \quad (3.18)$$

wobei der Index wieder die geflipten Qubits angibt.

In unserem Experiment möchten wir mit Hilfe der Korrelationsfunktion die Phase $\theta := \theta_{16,1}$ zwischen den Termen im $|GHZ\rangle$ -Zustand untersuchen:

$$|GHZ(\theta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HHHH\rangle + e^{i\theta}|VVVV\rangle) \quad (3.19)$$

Dazu wird der Erwartungswert $\langle \hat{\Omega}(\gamma) \rangle$ als Fourier Reihe dargestellt, wodurch wir erhalten:

$$\langle \hat{\Omega}(\gamma) \rangle = V_0 + V_{2c} \cos(2\gamma) + V_{2s} \sin(2\gamma) + V_{4c} \cos(4\gamma) + V_{4s} \sin(4\gamma) \quad (3.20)$$

Der Grund für die Fourier Darstellung ist, dass der theoretische Erwartungswert der Korrelationsfunktion als Fit-Funktion für die Messergebnisse verwendet wird. Durch diese Fourier-Darstellung wird die Anzahl der Fit-Parameter verringert, wodurch weniger Messpunkte zur Bestimmung der Phase benötigt werden.

Die Konstante V_0 ist dabei:

$$V_0 = 2(a_{10,7} \cos(\theta_{10,7}) + a_{11,6} \cos(\theta_{11,6}) + a_{13,4} \cos(\theta_{13,4})) \quad (3.21)$$

In die Konstante gehen nur die Kohärenzen $a_{i,j}$ ein, welche von den Beiträgen eines $|GHZ\rangle_{ij}$ -Zustands stammen. Die Amplituden V_{2c} , V_{2s} , V_{4c} und V_{4s} sind dabei:

$$\begin{aligned}
V_{2c} &= -2(a_{9,8} \cos(\theta_{9,8}) + a_{15,2} \cos(\theta_{15,2}) \\
&\quad + a_{12,5} \cos(\theta_{12,5}) + a_{14,3} \cos(\theta_{14,3})) \\
V_{2s} &= -2(a_{9,8} \sin(\theta_{9,8}) + a_{15,2} \sin(\theta_{15,2}) \\
&\quad + a_{12,5} \sin(\theta_{12,5}) - a_{14,3} \sin(\theta_{14,3})) \\
V_{4c} &= 2a_{16,1} \cos(\theta_{16,1}) \\
V_{4s} &= 2a_{16,1} \sin(\theta_{16,1})
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Für einen idealen $|GHZ\rangle$ -Zustand sind V_0 , V_{2c} und V_{2s} jeweils null. Die letzten beiden Terme im Erwartungswert der Korrelationsfunktion (Gl. 3.20) lassen sich zusammenfassen zu:

$$V_{4c} \cos(4\gamma) + V_{4s} \sin(4\gamma) = V_4 \cos(4\gamma + \theta) \tag{3.23}$$

Dieser Term enthält somit die Information über die Phase θ zwischen den Termen $|HHHH\rangle$ und $|VVVV\rangle$. Die Amplitude V_4 ist dabei die Summe der beiden kohärenten Beiträge:

$$V_4 = a_{16,1} + a_{1,16} = a_{|HHHH\rangle\langle VVVV|} + a_{|VVVV\rangle\langle HHHH|} = 2 a_{|HHHH\rangle\langle VVVV|} \tag{3.24}$$

zwischen den $|GHZ\rangle$ -Termen im Zustand $\hat{\rho}_{|GHZ\rangle}$. Damit ergibt sich die Fit-Funktion mit fünf Fit-Parametern zu

$$\langle \hat{\Omega}(\gamma) \rangle = V_0 + V_{2c} \cos(2\gamma) + V_{2s} \sin(2\gamma) + V_4 \cos(4\gamma + \theta) \tag{3.25}$$

Für den idealen $|GHZ\rangle$ -Zustand erwarten wir:

$$\langle \hat{\Omega}(\gamma) \rangle = 1 \cdot \cos(4\gamma + \theta), \text{ mit } \theta = 0^\circ \tag{3.26}$$

Im Experiment kann somit die Phase zwischen den $|GHZ\rangle$ Termen aus der Phasenverschiebung im Erwartungswert der Korrelationsfunktion bestimmt werden.

Experimentelle Ergebnisse

Zur experimentellen Bestimmung der Phase θ im beobachteten Zustand wurde in einer neuen Messreihe der Erwartungswert der Korrelationsfunktion für folgende Winkelpositionen:

$$\gamma \in \left\{ 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}, \pi \right\} \tag{3.27}$$

bestimmt. Die Messzeit pro Winkeleinstellung γ betrug 130 Minuten, wodurch sich bei einer Zählrate von drei bis vier vierfach Koinzidenzen pro Minute eine Gesamtzählrate pro Messpunkt von ca. 480 vierfach Koinzidenzen ergab. Diese Messpunkte wurden mit dem Erwartungswert der Korrelationsfunktion gemäß Gl.(3.25) gefittet. Dies ist in Abbildung 3.3

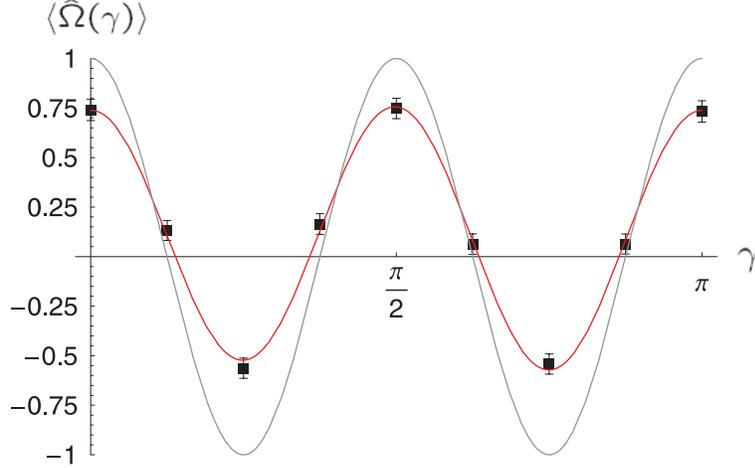


Abbildung 3.3: Die neun Messwerte der Korrelationsfunktion $\hat{\Omega}(\gamma)$ wurden mit der erwarteten Funktion $\langle \hat{\Omega}(\gamma) \rangle$ gefittet (rot). Die graue Kurve ist dabei der Erwartungswert der Korrelationsfunktion für den idealen $|GHZ\rangle$ -Zustand. Die Phasenverschiebung im beobachteten Zustand beträgt $\theta = 0.6^\circ \pm 1.6^\circ$

dargestellt. Die graue Kurve ist dabei der Verlauf der Korrelationsfunktion für einen idealen $|GHZ\rangle$ -Zustand mit Phase $\theta = 0^\circ$. Die somit bestimmte Phase beträgt $\theta = 0.6^\circ \pm 1.6^\circ$ und ist im Fehler nahe 0° . Mit einer weiteren Messung in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis kann zusammen mit dem Parameter V_4 aus der Korrelationsfunktion die Fidelity des beobachteten Zustands an den idealen $|GHZ(\theta)\rangle$ -Zustand bestimmt werden, welcher die gleiche Phase θ besitzt wie der beobachtete. Dieser soll im Weiteren mit $|\widetilde{GHZ}\rangle$ bezeichnet werden. Dazu zerlegen wir den $|\widetilde{GHZ}\rangle$ -Zustand in eine Summe aus Projektoren auf die Beiträge in seiner Dichtematrix:

$$\hat{\rho}_{|\widetilde{GHZ}\rangle} = \frac{1}{2} \left(\hat{P}_H + \hat{P}_V + 2\hat{P}_{HV} \right) \quad (3.28)$$

mit $\hat{P}_{HV} = |HHHH\rangle\langle VVVV| = |VVVV\rangle\langle HHHH|$. Dadurch ergibt sich für die Fidelity \mathcal{F}^θ :

$$\mathcal{F}^\theta(|\widetilde{GHZ}\rangle, \hat{\rho}_{exp}) = Tr \left[\frac{1}{2} \left(\hat{P}_H + \hat{P}_V + 2\hat{P}_{HV} \right) \hat{\rho}_{exp} \right] \quad (3.29)$$

Die Erwartungswerte der beiden Projektoren \hat{P}_H und \hat{P}_V wurden aus einer $\hat{\sigma}_z$ -Messung bestimmt. Der Erwartungswert von $2\hat{P}_{HV}$ entspricht dem Parameter V_4 . Die somit bestimmte Fidelity beträgt: $\mathcal{F}^\theta = 0.721 \pm 0.024$.

Alternativ dazu bestimmen wir noch die Fidelity zum $|GHZ\rangle$ -Zustand mit einer Phase $\theta = 0^\circ$. Dazu nutzen wir den Zusammenhang [33]:

$$\hat{\mathcal{F}}(|GHZ\rangle, \hat{\rho}_{exp}) = \frac{1}{2} \left[\hat{P}_H + \hat{P}_V \right] + \frac{1}{8} \sum_{n=0}^3 (-1)^{(n)} \left(\cos \left(n \frac{\pi}{4} \right) \hat{\sigma}_y + \sin \left(n \frac{\pi}{4} \right) \hat{\sigma}_x \right)^{\otimes 4} \quad (3.30)$$

Der Summand in der Fidelity, der die beiden Projektoren \hat{P}_H und \hat{P}_V enthält, liefert den Beitrag der Korrelationen in der Fidelity, welche eine Messung in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis enthalten,

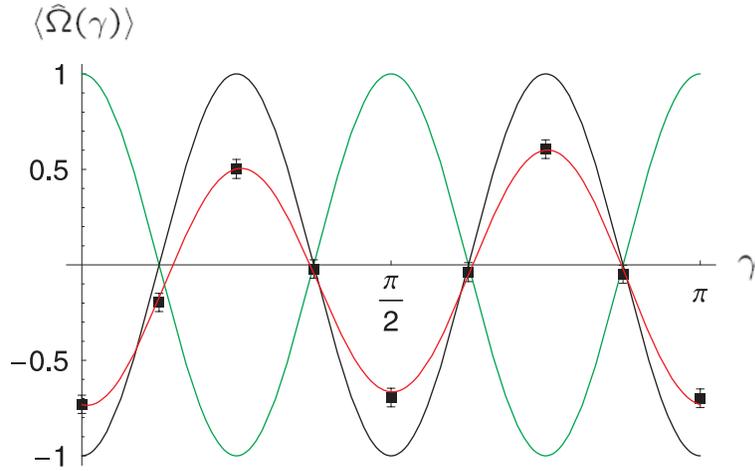


Abbildung 3.4: Die experimentell bestimmte Korrelationsfunktion für den $|GHZ\rangle$ -Zustand (rot) im Vergleich mit der erwarteten (schwarz). Die grüne Kurve zeigt den Erwartungswert der Korrelationsfunktion für einen idealen $|GHZ\rangle$ -Zustand, woraus die Antikorrelation der beiden orthogonalen Zustände deutlich wird.

wie zum Beispiel: $\mathbb{1} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \mathbb{1}$. Dies sind die letzten acht Korrelationen in Tabelle 3.1. Der zweite Summand ergibt die Beiträge der restlichen Korrelationen die in die Fidelity eingehen. Die Gl. (3.30) kann mit Hilfe der Korrelationsfunktion wie folgt vereinfacht werden:

$$\mathcal{F}(\hat{\rho}_{exp}, \hat{\rho}_{GHZ}) = \frac{1}{2} [\hat{P}_H + \hat{P}_V] + \frac{1}{8} \left[\hat{\Omega}(0) - \hat{\Omega}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \hat{\Omega}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \hat{\Omega}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right] \quad (3.31)$$

Für die obige Messung ergibt sich somit eine Fidelity, des beobachteten Zustands zum $|GHZ\rangle$ -Zustand mit Phase $\theta = 0^\circ$ von: $\mathcal{F} = 0.721 \pm 0.026$.

Vergleicht man die beiden Fidelities \mathcal{F}^θ und \mathcal{F} , so stellt man fest, dass sie gleiche Werte aufweisen. Dies ist zu erwarten, da die Phase θ nahezu null ist. Somit ist in dieser Messung der Einfluß der Phase θ für die Fidelity zu vernachlässigen.

Orthogonalität von GHZ Zuständen

Da mit Hilfe der Korrelationsfunktion die Phase θ im beobachteten Zustand bestimmt werden kann, ist es somit möglich zwischen den zueinander orthogonalen $|GHZ\rangle$ -Zuständen:

$$\begin{aligned} |GHZ\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|HHHH\rangle + |VVVV\rangle) \\ |GHZ^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|HHHH\rangle - |VVVV\rangle) \end{aligned} \quad (3.32)$$

zu unterscheiden. Um dies experimentell zu bestätigen, wurde ein $\lambda/2$ -Wellenplättchen, auf der Winkelposition $\phi = 0^\circ$, in die Mode d gestellt. Dieses bewirkt für das Photon in Mode c : $|H\rangle \rightarrow |H\rangle$ und $|V\rangle \rightarrow -|V\rangle$. Dadurch erhalten wir einen Phasenschub von π zwischen den

$|HHHH\rangle$ und $|VVVV\rangle$ -Termen im $|GHZ\rangle$ -Zustand, wodurch der $|GHZ^-\rangle$ -Zustand beobachtet werden kann. Der Erwartungswert der Korrelationsfunktion wurde wieder für die neun Winkelpositionen γ aus (3.27) bestimmt. Dabei betrug die Messzeit pro Messpunkt 130 Minuten. Mit einer beobachteten vierfach Zählrate von ca. 3.5 Koinzidenzen pro Minute erhielten wir somit eine Gesamtzählrate von ca. 450 Ereignissen für jeden Messpunkt der Korrelationsfunktion. Das Ergebnis dieser Messung ist in Abbildung 3.4 gezeigt. Aus dem gegensätzlichen Verhalten des Erwartungswerts der Korrelationsfunktion für den $|GHZ^-\rangle$ -Zustand, kann auf eine Phase von π zwischen dem $|HHHH\rangle$ und dem $|VVVV\rangle$ -Term im beobachteten Zustand geschlossen werden. Die Amplitude der Oszillation ist wieder auf Grund der nicht perfekten Interferenz der Photonen am Überlapp-PBS, welche durch eine partielle spektrale Unterscheidbarkeit der Photonen verursacht wird, kleiner als die theoretische von eins.

Der aus der Korrelationsfunktion bestimmte Phasenschub $\tilde{\theta}$, zum idealen $|GHZ^-\rangle$ -Zustand, beträgt $\tilde{\theta} = 3.8^\circ \pm 1.5^\circ$.

Die mit Hilfe von Gleichung (3.29) bestimmte Fidelity \mathcal{F}^θ betrug dabei: $\mathcal{F}^\theta = 0.699 \pm 0.024$. Bestimmt man alternativ dazu die Fidelity an den $|GHZ^-\rangle$ -Zustand erhält man: $\mathcal{F} = 0.703 \pm 0.026$.

Die Werte der beiden Fidelities \mathcal{F}^θ und \mathcal{F} sind dabei, im Rahmen des Fehlers gleich. Der Grund, weshalb die Fidelity des beobachteten $|GHZ^-\rangle$ -Zustands kleiner als für den beobachteten $|GHZ\rangle$ -Zustand ist, dass die Güte des Überlapps für diese Messreihe kleiner war.

3.3 Der antisymmetrische Zustand $|\psi^{(4)}\rangle$

3.3.1 Qualität und Verschränkung

Um in unserem Experiment den $|\psi^{(4)}\rangle$ -Zustand beobachten zu können wird das $\lambda/2$ -Wellenplättchen vor dem Überlapp-PBS auf $\phi = \frac{\pi}{4}$ gestellt. Der ideale $|\psi^{(4)}\rangle$ -Zustand, in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis, hat die Form:

$$|\psi^{(4)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|HHHH\rangle + |VVVV\rangle) - \frac{1}{2\sqrt{3}} (|HVHV\rangle + |HVVH\rangle + |VHHV\rangle + |VHVH\rangle) \quad (3.33)$$

wodurch wir bei einer Messung in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis entsprechend sechs charakteristische Beiträge in den Zählraten erwarten.

Im Experiment konnte für den $|\psi^{(4)}\rangle$ -Zustand eine Zählrate von fünf bis sechs vierfach Koinzidenzen pro Minute beobachtet werden, wobei die Messzeit pro Messsetting 58 Minuten betrug. Abbildung 3.5 zeigt das Ergebnis einer Messung in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis im Vergleich zum idealen $|\psi^{(4)}\rangle$ -Zustand. Die Korrelation der Photonen betrug $K_{zzzz}^{exp} = 0.968 \pm 0.056$ und ist in guter Übereinstimmung mit dem theoretisch erwarteten Wert von eins. Aus dieser Messung ist die $|\psi^{(4)}\rangle$ -Struktur im beobachteten Zustand klar zu erkennen. Die zusätzlichen Zählraten entstehen dabei aus höheren Ordnungen der SPDC. Die Korrelation ist

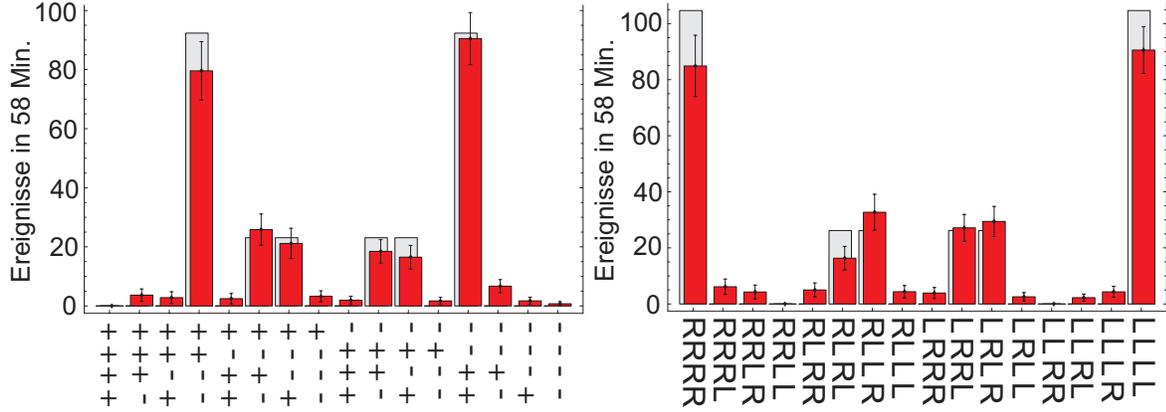


Abbildung 3.6: Ergebnis der Messungen in der $\hat{\sigma}_x$ (links) und $\hat{\sigma}_y$ -Basis (rechts) im Vergleich zum idealen $|\psi^{(4)}\rangle$ -Zustand. Die Korrelationen betragen hierbei $K_{xxxx}^{exp} = 0.825 \pm 0.061$ und $K_{yyyy}^{exp} = 0.791 \pm 0.058$.

wodurch die echte vier-Qubit Verschränkung des beobachteten Zustands nachgewiesen wird.

3.3.2 GHZ-Korrelationsfunktion und $|\psi^{(4)}\rangle$

Zur weiteren Untersuchung des beobachteten Zustands betrachten wir die Korrelationsfunktion $\hat{\Omega}(\gamma)$. Dazu schreiben wir diesen zunächst als Summe von $|GHZ\rangle$ -Zuständen und Spin geflipten $|GHZ\rangle_{ij}$ -Zuständen

$$|\psi^{(4)}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|GHZ\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|GHZ\rangle_{bc} - \frac{1}{\sqrt{6}}|GHZ\rangle_{cd} \quad (3.36)$$

woraus sich unmittelbar die resultierenden Beiträge für die Korrelationsfunktion ablesen lassen. Wir erhalten für einen idealen $|\psi^{(4)}\rangle$ -Zustand somit:

$$\langle \hat{\Omega}(\gamma) \rangle = V_0 + V_4 \cos(4\gamma) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos(4\gamma) \quad (3.37)$$

Zur experimentellen Bestimmung der Korrelationsfunktion wurde der Erwartungswert in einer neuen Messreihe für die neun Winkeleinstellungen γ aus (3.27) bestimmt und mit der Funktion aus Gleichung (3.25) gefittet. Die beobachtete Zählrate war dabei drei bis vierfach Koinzidenzen pro Minute. Dabei betrug die Messzeit pro Messpunkt 210 Minuten, wodurch wir eine Gesamtzählrate pro Messpunkt von ca. 740 Ereignissen erhielten. Das Ergebnis ist in Abbildung 3.7 gezeigt. Die aus dem Fit bestimmten Parameter sind in

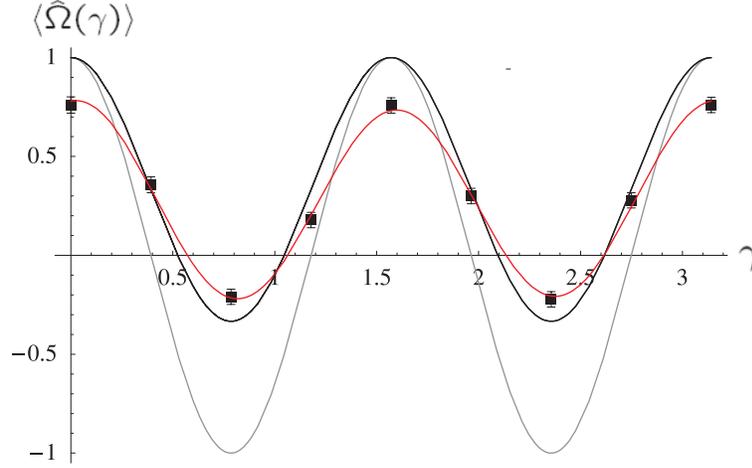


Abbildung 3.7: Die Abbildung zeigt die an die gemessenen Punkte gefittete Korrelationsfunktion (rot) im Vergleich zur theoretisch erwarteten Funktion (schwarz). Die graue Funktion zeigt den idealen Verlauf für einen $|GHZ\rangle$ -Zustand.

folgender Tabelle den theoretischen Werten gegenübergestellt:

	experimentell	theoretisch
V_0	0.273 ± 0.010	$\frac{1}{3}$
V_4	0.456 ± 0.015	$\frac{2}{3}$
θ	$-0.5^\circ \pm 1.9^\circ$	0°

(3.38)

Mit einer weiteren Messung in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis, konnte mit Hilfe der Gleichung (3.31) die Fidelity des beobachteten Zustands an den $|GHZ\rangle$ -Zustand bestimmt werden. Diese ist:

$$\mathcal{F}(|GHZ\rangle, \hat{\rho}_{exp}) = 0.568 \pm 0.019 \quad (3.39)$$

wobei die Fidelity für einen idealen $|\psi^{(4)}\rangle$ -Zustand $\frac{2}{3}$ beträgt. Durch diese Messungen kann der $|GHZ\rangle$ -Anteil im beobachteten Zustand verifiziert werden. Die Abweichungen von den theoretischen Werten können durch die partielle räumliche Unterscheidbarkeit der Photonen erklärt werden, da dadurch die Kohärenzen verringert werden.

3.3.3 Charakterisierung des Überlapps mit dem $|\psi^{(4)}\rangle$ -Zustand

Theorie

Im Folgenden soll die Charakterisierung des Überlapps am PBS mit dem $|\psi^{(4)}\rangle$ -Zustand besprochen werden. Um einen Interferenzeffekt beobachten zu können, wird in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis analysiert. Der Grund hierfür wird klar, wenn wir die Situation für die kohärente

und inkohärente Überlagerung der Photonen am Überlapp-PBS betrachten. Im inkohärenten Fall sind die Photonen unabhängig voneinander und sind nach dem Überlapp-PBS entsprechend $|H\rangle$ oder $|V\rangle$ polarisiert. Werden diese nun in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis analysiert, ist es für jedes Photon gleich wahrscheinlich als $|+\rangle$ oder $|-\rangle$ detektiert zu werden. Dadurch werden alle Ereignisse gleich wahrscheinlich. Im Falle der kohärenten Überlagerung bilden die Photonen einen $|\psi^{(4)}\rangle$ -Zustand und sind somit verschränkt. Aufgrund der Korrelation der Photonen, können nur die Ereignisse beobachtet werden, welche einen entsprechenden Term im $|\psi^{(4)}\rangle$ -Zustand, dargestellt in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis, haben.

Zur genaueren Untersuchung der zu erwartenden Zählraten im kohärenten und inkohärenten Fall, werden die ursprünglichen Moden $\{a, c\}$ der Photonen mit dem Index $\{1, 2\}$ markiert, wodurch formal die Inkohärenz der einzelnen Terme zum Ausdruck gebracht werden kann.

Bei der inkohärenten Überlagerung ($z \neq z_D$) interferieren die Photonen am Überlapp-PBS nicht und teilen sich somit unabhängig voneinander auf die vier Moden $\{a, b, c, d\}$ auf. Dabei gibt es sechs Möglichkeiten wie sich die vier Photonen, mit dem zusätzlichen Label $\{1, 2\}$, auf die vier Moden $\{a, b, c, d\}$ aufteilen können. Diese sind:

$$\begin{aligned} a^1 b^1 c^2 d^2 & \quad a^2 b^2 c^1 d^1 \\ a^1 b^2 c^1 d^2 & \quad a^2 b^1 c^2 d^1 \\ a^1 b^2 c^2 d^1 & \quad a^2 b^1 c^1 d^2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Auf Grund der Unterscheidbarkeit, durch die Ankunftszeit der Photonen am Überlapp-PBS, sind die verschiedenen Möglichkeiten (3.40) wie ein vierfach Ereignis in der $\hat{\sigma}_x$ -Basis entstehen kann, inkohärent zu addieren. Werden die Photonen am Überlapp-PBS kohärent überlagert, können diese nicht mehr durch die Ankunftszeit voneinander unterschieden werden. Dadurch braucht das zusätzliche Label $\{1, 2\}$ der Photonen nicht mehr berücksichtigt werden und die verschiedenen Möglichkeiten (3.40) für ein vierfach Ereignis sind kohärent zu addieren.

Dies soll am Beispiel des Ereignisses $c(++--)$ verdeutlicht werden. Der Anteil im beobachteten Zustand, welcher zu dem Ereignis $c(++--)$ beiträgt, ist entsprechend eine Summe aus den sechs verschiedenen Möglichkeiten (3.40):

$$-\frac{1}{8\sqrt{3}}(2a_+^1 b_+^1 c_-^2 d_-^2 + a_+^1 b_+^2 c_-^1 d_-^2 + a_+^1 b_+^2 c_-^2 d_-^1 + 2a_+^2 b_+^2 c_-^1 d_-^1 + a_+^2 b_+^1 c_-^2 d_-^1 + a_+^2 b_+^1 c_-^1 d_-^2) \quad (3.41)$$

Um den Beitrag für die Zählrate $c(++--)$ im inkohärenten Fall zu erhalten, werden die Betragsquadrate der einzelnen Terme addiert. Dadurch erhalten wir einen Beitrag von $\frac{1}{16}$ für dieses Ereignis an der Gesamtzählrate. Im kohärenten Fall bleibt das zusätzliche Label $\{1, 2\}$ der Photonen unberücksichtigt, wodurch sich (3.41) vereinfacht zu:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}(a_+ b_+ c_- d_-) \quad (3.42)$$

Daraus ergibt sich ein Beitrag von $\frac{1}{3}$ für dieses Ereignis an der Gesamtzählrate. Wird diese Koinzidenzzählrate in Abhängigkeit der Position z des Kopplers A untersucht, können wir für dieses Ereignis somit einen Anstieg in der Zählrate beobachten. In Tabelle 3.2 ist dies für alle sechzehn möglichen Ereignisse zusammengefasst.

Experimentelle Ergebnisse

Zur Charakterisierung des Überlapps mit dem $|\psi^{(4)}\rangle$ -Zustand¹ wurden die vierfach Koinzidenzzählraten in Abhängigkeit des Kopplers A gemessen. Der Koppler wurde dabei von der Position $z = -0.03$ mm in Schritten von $\Delta z = 0.005$ mm nach $z = 0.03$ mm verfahren. Somit erhielten wir dreizehn Messpunkte, wobei die Messzeit pro Position z des Kopplers A dreizehn Minuten betrug. Bei einer Zählrate von sechzehn Koinzidenzen pro Minute erhalten wir eine Gesamtzählrate von ca. 200 Koinzidenzen pro Messpunkt.

Wir wollen zunächst die Messergebnisse für die inkohärente und kohärente Überlagerung der Photonen am Überlapp-PBS betrachten. Die entsprechenden Messergebnisse für die Positionen $z = -0.3$ mm und $z = z_D$ sind zusammen mit den theoretisch erwarteten Zählraten in Abbildung 3.8 dargestellt. Daraus ist deutlich zu erkennen, dass sich die Ge-

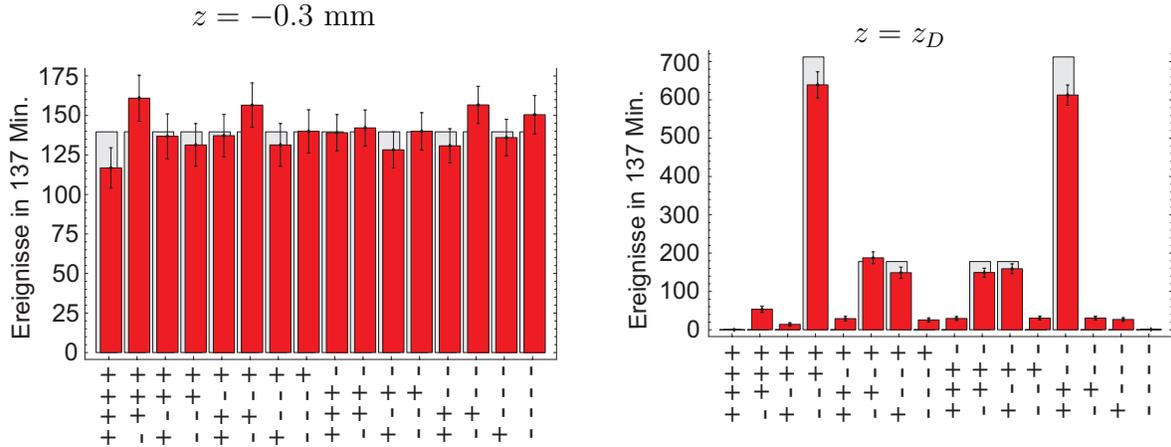


Abbildung 3.8: Vergleich der beobachteten Zählraten für eine kohärente und inkohärente Überlagerung der Photonen am Überlapp-PBS.

samtzählrate im inkohärenten Fall gleichmäßig auf die sechzehn Möglichkeiten aufteilt. Im Falle der kohärenten Überlagerung ist wie erwartet wieder die $|\psi^{(4)}\rangle$ -Struktur zu erkennen. Die Korrelation für die inkohärente Überlagerung beträgt dabei $K_{xxxx}^{inko} = -0.03 \pm 0.02$, wobei eine Korrelation von null erwartet wird. Im kohärenten Fall beträgt die Korrelation $K_{xxxx}^{ko} = 0.777 \pm 0.02$, während der theoretische Wert bei eins liegt. Im Vergleich zur vorherigen Messung sind die Korrelationen innerhalb des Fehlers gleich. Im Folgenden werden exemplarisch die beobachteten Zählraten einzelner Ereignisse in Abhängigkeit der Position z des Kopplers A diskutieren. Die Abbildung 3.9 zeigt den Verlauf der zwei und vierfach

¹Die Winkelposition des $\lambda/2$ -Wellenplättchens vor dem Überlapp-PBS ist dem entsprechend $\phi = \frac{\pi}{4}$.

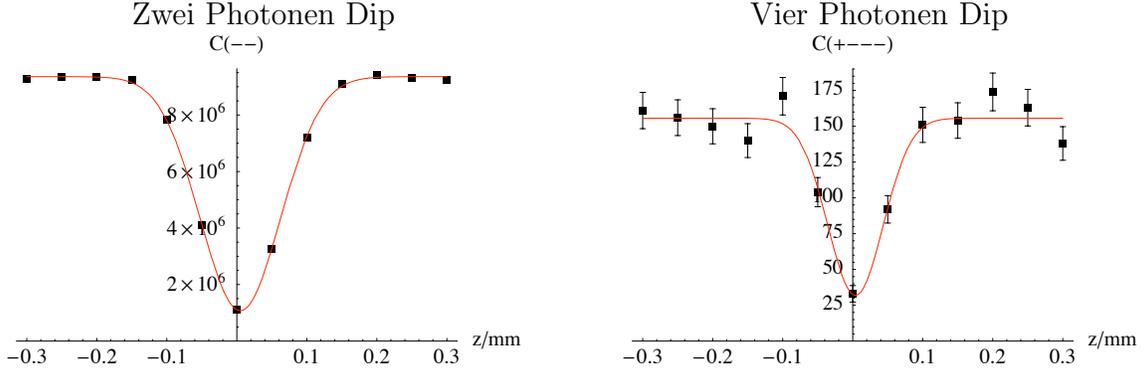


Abbildung 3.9: Die zwei- und vierfach Zählraten $c(--)$ und $c(+---)$ in Abhängigkeit der Position z der Kopplers A, woraus die unterschiedliche Breite (FWHM) zu erkennen ist.

Zählrate $c(--)$ und $c(+---)$ in Abhängigkeit der Position z . Dabei fällt die unterschiedliche charakteristische Breite (FWHM) auf:

$$\begin{aligned} B_2 &= (95.46 \pm 1) \mu\text{m} \\ B_4 &= (65.76 \pm 5) \mu\text{m} \end{aligned} \quad (3.43)$$

wobei sich der Index entsprechend auf die zwei bzw. vier-Photonen Ereignisse bezieht. Dies kann verstanden werden, wenn die Photonen, wie in Abschnitt 2.3.1 durch Gaußsche Wellenpakete beschrieben werden. Dazu fassen wir die zwei Photonen in einer Mode $\{a, c\}$ zu einem Gauschen Wellenpaket zusammen, wodurch wir je ein Wellenpaket mit einem FWHM von $l_c/\sqrt{2}$ in den Moden $\{a, c\}$ erhalten. Mit dem Zusammenhang $l_c = B\sqrt{2}$ aus Kohärenzlänge l_c und charakteristischer Breite B erhalten wir demnach eine charakteristische Breite B_4 , die gegenüber B_2 um den Faktor $\sqrt{2}$ kleiner ist.

$$B_4 = \frac{B_2}{\sqrt{2}} \quad (3.44)$$

Demnach muß die aus der vierfach Zählrate $c(+---)$ bestimmte Kohärenzlänge mit einem Faktor $\sqrt{2}$ multipliziert werden, um die Kohärenzlänge der Photonen zu erhalten. Die somit berechneten Kohärenzlängen aus den Verläufen der zwei- und vierfach Zählraten ist:

$$\begin{aligned} l_c^{(2)} &= \sqrt{2} B_2 = (135 \pm 1) \mu\text{m} \\ l_c^{(4)} &= \sqrt{2} \sqrt{2} B_4 = (132 \pm 6) \mu\text{m} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Diese zeigen gute Übereinstimmung innerhalb des Fehlers und werden somit durch das beschriebene Bild gut verstanden. Für die Visibility \mathcal{V}_4 des Verlaufs der vierfach Zählrate erwarten wir mit der obigen Beschreibung den Zusammenhang mit der Visibility \mathcal{V}_2 für zwei Photonen: $(\mathcal{V}_2)^2 = \mathcal{V}_4$:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 &= 0.885 \pm 0.003 \Rightarrow (\mathcal{V}_2)^2 = 0.783 \pm 0.004 \\ \mathcal{V}_4 &= 0.794 \pm 0.038 \end{aligned} \quad (3.46)$$

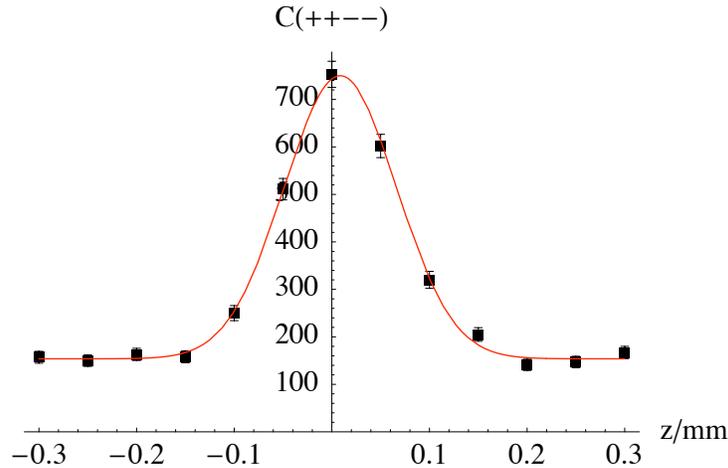


Abbildung 3.10: Abhängigkeit der vierfach Zählraten $c(++--)$ von der Position z der Kopplers A mit einem Verhältnis von inkohärenter- zu kohärenter Zählrate von $V=4.88 \pm 0.17$

was durch diese beiden Messungen bestätigt wird. Der Grund weshalb die Zählrate für die kohärente Überlagerung nicht auf den theoretischen Wert von null abfällt, liegt wieder an der partiellen räumlichen Unterscheidbarkeit der Photonen.

Als nächstes Beispiel betrachten wir das Ereignis $(++--)$. Das Messergebnis dafür wird in Abbildung 3.10 gezeigt. Das Verhältnis von inkohärenter- zu kohärenter Zählrate beträgt $V=4.88 \pm 0.174$, wobei theoretisch 5.33 erwartet wird. Die charakteristische Breite B_4 für dieses Ereignis entspricht der Breite für ein zwei-Photonen Ereignis und kann somit im obigen Bild nicht erklärt werden.

Als letztes Beispiel betrachten wir das Ereignis $c(-+-+)$, welches in Abbildung 3.11 gezeigt wird. Das Verhältnis von inkohärenter- zu kohärenter Zählrate beträgt dabei 1.27 ± 0.07 und stimmt mit dem erwarteten Wert von 1.33 gut überein. Allerdings würde ein kontinuierlicher Anstieg in der Zählrate erwartet werden. Die eingezeichnete Kurve in der Abbildung dient dabei nur zur Verdeutlichung und ist kein Fit an die Messdaten. Dieses Verhalten ist bisher noch nicht verstanden.

Zusammenfassend kann für die Charakterisierung des Überlapps mit dem $|\psi^{(4)}\rangle$ -Zustand gesagt werden, dass die Vorhersagen für kohärente und inkohärente Überlagerung durch die Messung bestätigt werden. Allerdings bleiben zum einen die unterschiedlichen charakteristischen Breiten zu deuten und zum anderen weshalb die Zählraten für das Ereignis $(-+-+)$ zunächst abnehmen, bevor diese ansteigen.

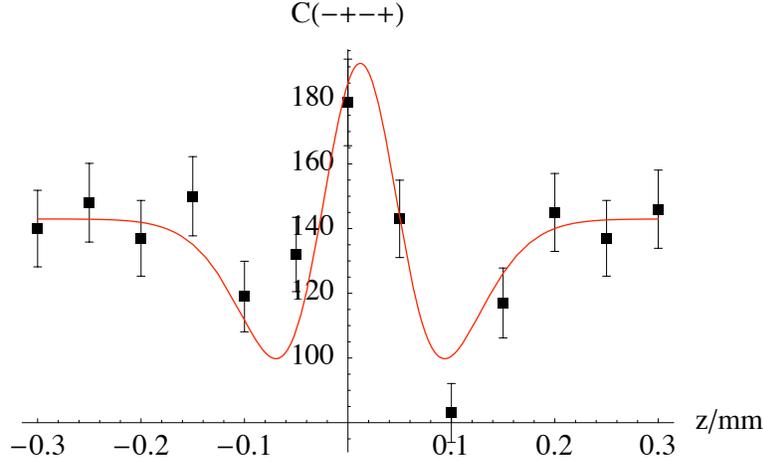


Abbildung 3.11: Messergebnis für das Ereignis $(-+-+)$. Dieses stellt einen typischen Verlauf des Scans für die Events $(+-+-)$, $(+--+)$ und $(-+-)$ dar. Das Verhältnis von inkohärenter- zu kohärenter Zählrate ist dabei 1.27 ± 0.07 was gut mit dem theoretischen Wert von $1\frac{1}{3}$ übereinstimmt.

3.4 Der biseparable Zustand: $|\phi^+\rangle \otimes |\phi^+\rangle$

3.4.1 Qualität und Verschränkung

Der biseparable $|\psi^+\rangle \otimes |\psi^+\rangle$ -Zustand kann bei der Winkelposition $\phi = 0^\circ$, des $\lambda/2$ -Wellenplättchens vor dem Überlapp-PBS, beobachtet werden. In der $\hat{\sigma}_z$ -Basis hat der ideale Zustand die Form:

$$|\psi^+\rangle_{ab} \otimes |\psi^+\rangle_{cd} = \frac{1}{2} (|HVVH\rangle + |VHHV\rangle + |HVHV\rangle + |VHVV\rangle) \quad (3.47)$$

Die Indizes bringen hierbei zum Ausdruck, dass die beiden Qubits in Mode a und b , sowie die beiden Qubits in Mode c und d , verschränkt sind. Dieser Zustand kann als Superposition zweier $|GHZ\rangle$ -Zustände mit jeweils zwei Spin geflipten Qubits geschrieben werden:

$$|\psi^+\rangle_{ab} \otimes |\psi^+\rangle_{cd} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|GHZ\rangle_{bc} + |GHZ\rangle_{ac}) \quad (3.48)$$

Die Indizes beziehen sich hier wieder auf die Spin geflipten Qubits. Da die Anteile in diesem Zustand zwei $|GHZ\rangle$ -Zuständen mit zwei Spinflips entsprechen, ist der Mittelwert der Korrelationsfunktion $\hat{\Omega}(\gamma)$, wie in Abschnitt 3.2.1 besprochen, somit eine Konstante. Dadurch kann mit Hilfe der Korrelationsfunktion $\hat{\Omega}(\gamma)$ (Gl. 3.14) keine Information über eine Phase erlangt werden. Um zum Beispiel die Phase $\theta_{10,7}$ zwischen den Termen $|HVVH\rangle$ und $|VHHV\rangle$ zu untersuchen und mit der Korrelationsfunktion den beobachteten biseparablen Zustand zu charakterisieren, werden die Qubits in Mode b und c geflipt. Experimentell ist dies mit Hilfe zweier $\lambda/2$ -Wellenplättchen auf der Winkelposition $\phi_i = 45^\circ$, in den Moden

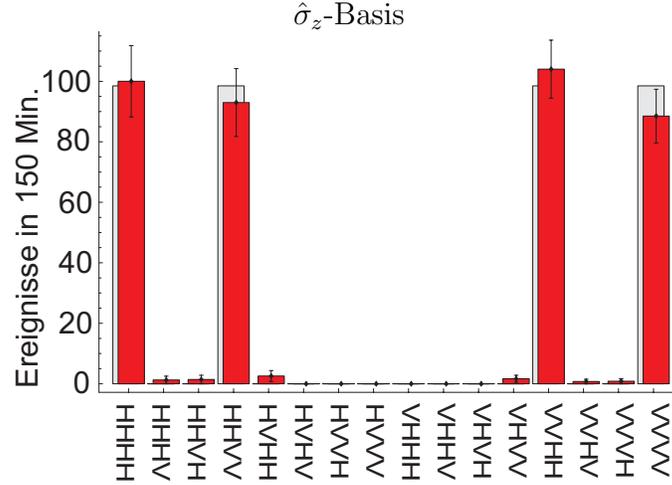


Abbildung 3.12: Messergebnis (rot) für den beobachteten Zustand im Vergleich zum idealen $|Bell\rangle^{\otimes 2}$ -Zustand (grau). Die Korrelation K_{zzzz}^{exp} beträgt dabei 0.957 ± 0.053 .

$i = \{b, c\}$, zu realisieren. Dadurch erhalten wir für den obigen Zustand:

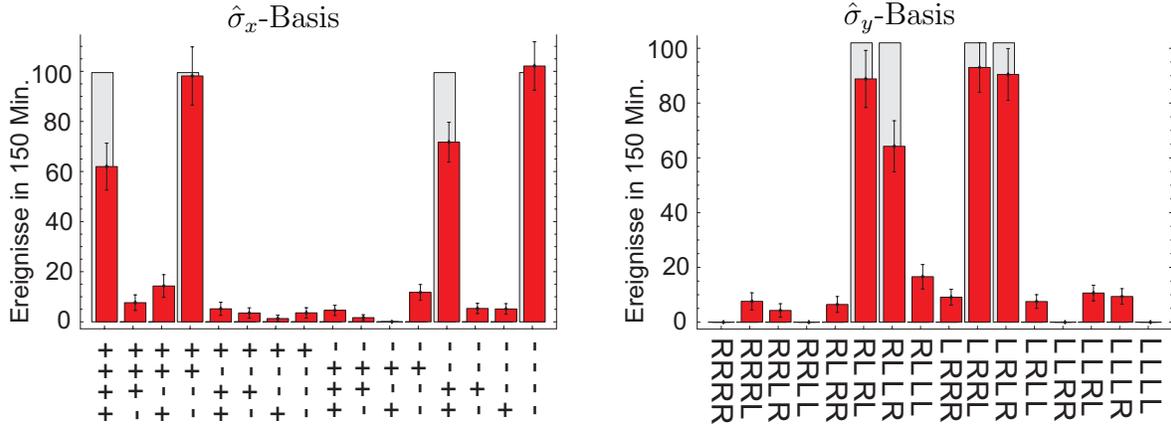
$$\begin{aligned}
|Bell\rangle^{\otimes 2} &= |\phi^+\rangle_{ac} \otimes |\phi^+\rangle_{ad} = \frac{1}{2} (|HHHH\rangle + |VVVV\rangle + |HHVV\rangle + |VVHH\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (|GHZ\rangle + |GHZ\rangle_{ab})
\end{aligned} \tag{3.49}$$

welcher im Folgenden mit $|Bell\rangle^{\otimes 2}$ bezeichnet werden soll. Durch die zwei Spin flips wird der $|GHZ\rangle_{ac}$ -Anteil in einen $|GHZ\rangle$ -Anteil im beobachteten Zustand transformiert und somit kann mit Hilfe der Korrelationsfunktion die Phase zwischen diesen Termen bestimmt werden.

Bevor die Charakterisierung des beobachteten $|Bell\rangle^{\otimes 2}$ -Zustands mit Hilfe der Korrelationsfunktion besprochen wird, wollen wir zunächst die Güte des beobachteten Zustands sowie seine Verschränkungseigenschaften untersuchen.

Vier-Photonen Zustand

Zur Bestimmung der Fidelity des beobachteten Zustands an den idealen $|Bell\rangle^{\otimes 2}$ -Zustand werden neun Messsettings benötigt. Aus diesen lassen sich die sechzehn relevanten Beiträge, welche in die Fidelity eingehen, bestimmen. Wir konnten dabei eine Zählrate von zwei bis drei vierfach Koinzidenzen pro Minute beobachten. Die Messzeit pro Messsetting betrug dabei 150 Minuten, wodurch wir eine Gesamtzählrate von ca. 380 vierfach Koinzidenzen pro Messpunkt erhalten. Die sechzehn relevanten Beiträge sind zusammen mit den experimentell bestimmten Werten in Tabelle 3.3 aufgelistet. Zunächst betrachten wir das Messergebnis in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis. In dieser Basis erwarten wir, bis auf experimentelle Fehler, nur Zählraten für die Ereignisse HHVV, VVHH, HHHH und VVVV. Das Ergebnis dieser Messung wird in Abbildung 3.12 gezeigt. Die Korrelation in dieser Basis, beträgt $K_{zzzz}^{exp} = 0.957 \pm 0.053$ und ist somit in guter Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert



Abbildungung 3.13: Messergebnisse (rot) für den beobachteten Zustand, analysiert in der $\hat{\sigma}_x$ und $\hat{\sigma}_y$ -Basis. Die Korrelationen betragen dabei $K_{XXXX}^{exp} = 0.711 \pm 0.053$ und $K_{YYYY}^{exp} = 0.649 \pm 0.052$.

von eins. Die zusätzlichen Beiträge in der Zählrate entstehen aus den höheren Ordnungen der SPDC.

Zur Untersuchung der Kohärenz zwischen den Beiträgen im beobachteten Zustand, vergleichen wir die Messergebnisse in der $\hat{\sigma}_x$ und $\hat{\sigma}_y$ -Basis mit den theoretisch erwarteten Zählraten. Dies wird in Abbildung 3.13 gezeigt. Die daraus bestimmten Korrelationen betragen: $K_{XXXX}^{exp} = 0.711 \pm 0.053$ und $K_{YYYY}^{exp} = 0.649 \pm 0.052$ und zeigen dabei eine größere Abweichung vom idealen Wert eins, als die Korrelation K_{ZZZZ}^{exp} . Weshalb die Beiträge $c(++++)$ und $c(----)$ in der $\hat{\sigma}_x$ -Messung so stark von der theoretischen Zählrate abweicht, ist noch zu klären. Dennoch ist die charakteristische Struktur des $|Bell\rangle^{\otimes 2}$ zu erkennen, wodurch diese beiden Messungen auf die Kohärenz zwischen den einzelnen Beiträgen im beobachteten Zustand hinweisen.

Zur Bestimmung der Fidelity werden die experimentell bestimmten Werte aus Tabelle 3.3 in Gleichung (1.35) eingesetzt. Somit erhalten wir für die Fidelity des beobachteten Zustands an den idealen $|Bell\rangle^{\otimes 2}$ -Zustand:

$$\mathcal{F}(|Bell\rangle^{\otimes 2}, \hat{\rho}_{exp}) = 0.844 \pm 0.011 \quad (3.50)$$

Zur weiteren Charakterisierung des beobachteten Zustands werden die einzelnen Subsysteme von Qubit-Paaren $Q_i Q_j$ untersucht. Dabei bezeichnen die Indizes i und j die räumliche Mode $\{a, b, c, d\}$ der Qubits des betrachteten Subsystems.

Der ideale $|Bell\rangle^{\otimes 2}$ -Zustand ist ein biseparabler Zustand. Die zwei Subsysteme der Qubit-Paare $Q_a Q_b$ und $Q_c Q_d$ sind dabei im maximal verschränkten Zustand $|\phi^+\rangle_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle_{ij} + |VV\rangle_{ij})$. Betrachtet man die anderen Sub-Systeme aus zwei Qubit-Paaren befinden sich diese in einem maximal gemischten Zustand und sind somit separabel. Diese Eigenschaften sollen nun am beobachteten Zustand untersucht werden.

Korrelation K_{ijkl}	Erwartungswert: a_{ijkl}^{exp}	a_{ijkl}^{th}
$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x$	0.711 ± 0.053	1
$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y$	-0.743 ± 0.052	-1
$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$	0.883 ± 0.052	1
$\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}$	0.846 ± 0.030	1
$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y$	0.649 ± 0.052	1
$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x$	-0.773 ± 0.054	-1
$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$	-0.806 ± 0.054	-1
$\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}$	-0.853 ± 0.031	-1
$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$	0.957 ± 0.053	1
$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}$	0.981 ± 0.031	1
$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x$	0.832 ± 0.055	1
$\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y$	-0.872 ± 0.054	-1
$\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}$	1.00 ± 0.018	1
$\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x$	0.840 ± 0.031	1
$\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y$	-0.832 ± 0.030	-1
$\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$	0.981 ± 0.031	1

Tabelle 3.3: Liste der relevanten Korrelationen für die Berechnung der Fidelity $\mathcal{F}(|Bell\rangle, \hat{\rho}_{exp})$ des $|Bell\rangle^{\otimes 2}$ -Zustands. Die ersten neun Korrelationen entsprechen dabei den Messsettings.

Zwei-Photonen Zustände

Zunächst betrachten wir die Fidelities der einzelnen Qubit-Paare $Q_i Q_j$ im $|Bell\rangle^{\otimes 2}$ -Zustand, an den idealen $|\phi^+\rangle_{ij}$ -Zustand. Für die Qubit-Paare $Q_a Q_b$ und $Q_c Q_d$ beträgt der theoretische Wert der Fidelity eins und für alle anderen Qubit-Paare $Q_a Q_c$, $Q_a Q_d$, $Q_b Q_c$, $Q_b Q_d$ jeweils $\frac{1}{4}$. Dies ist verständlich, da die so genannten *Bell-Zustände* [5]:

$$\begin{aligned}
|\psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle \pm |VH\rangle) \\
|\phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle \pm |VV\rangle)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

eine Basis des zwei-Qubit Hilbertraums bilden. Der maximal gemischte Zustand $\hat{\rho}_{MG}$ ist in dieser Basis eine inkohärente Überlagerung der Basiszustände mit einer Gewichtung von

$Q_i Q_j$	$\mathcal{F}(\phi^+\rangle, \hat{\rho}_{ij}^{exp})$	$\mathcal{F}(\phi^+\rangle, \hat{\rho}_{ij}^{th})$
$Q_a Q_b$	0.913 ± 0.014	1
$Q_c Q_d$	0.920 ± 0.014	1
$Q_a Q_c$	0.218 ± 0.023	0.25
$Q_a Q_d$	0.275 ± 0.023	0.25
$Q_b Q_c$	0.223 ± 0.023	0.25
$Q_b Q_d$	0.238 ± 0.023	0.25

Tabelle 3.4: Die experimentell bestimmte Fidelities der Qubit-Paare $Q_i Q_j$ an den $|\phi^+\rangle_{ij}$ -Zustand im Vergleich zur theoretischen Wert. Die Indizes beziehen sich dabei auf die räumliche Mode der Qubits.

je $\frac{1}{4}$:

$$\hat{\rho}_{MG} = \frac{1}{4} (|\psi^+\rangle\langle\psi^+| + |\psi^-\rangle\langle\psi^-| + |\phi^+\rangle\langle\phi^+| + |\phi^-\rangle\langle\phi^-|) \quad (3.52)$$

woraus folgt, dass der maximale gemischte Zustand eine Fidelity von $\frac{1}{4}$ an jeden der Bell-Zustand besitzt.

Die Fidelities der einzelnen Qubit-Paare $Q_i Q_j$ sind in Tabelle 3.4 zusammengefasst. Diese sind in guter Übereinstimmung mit den theoretisch erwarteten Werten.

Zum Nachweis der Verschränkung der Qubit-Paare $Q_a Q_b$ und $Q_c Q_d$ wurde ein Witness Operator verwendet [34, 35]:

$$\hat{\mathcal{W}} = \frac{1}{4} (\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} - \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z) \quad (3.53)$$

Mit diesem Witness Operator konnten die zwei-Qubit Verschränkung der beiden Paare $Q_a Q_b$ und $Q_c Q_d$ nachgewiesen werden:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{W}} \rangle_{ab} &= -0.431 \pm 0.013 \\ \langle \hat{\mathcal{W}} \rangle_{cd} &= -0.420 \pm 0.013 \end{aligned} \quad (3.54)$$

wobei der theoretische Wert bei $-\frac{1}{2}$ liegt.

Um zu zeigen, dass die anderen Paare nicht verschränkt sind, können wir den Witness Operator nicht heranziehen. Dies liegt daran, dass der negative Erwartungswert des Witness Operators ein hinreichendes, aber kein notwendiges Kriterium zum Nachweis von Verschränkung ist. Deshalb verwendeten wir das PPT-Kriterium, dass in Abschnitt 1.4.2 vorgestellt wurde, um die Separabilität der Qubit-Paare $Q_a Q_c$, $Q_a Q_d$, $Q_b Q_c$ und $Q_b Q_d$ nachzuweisen. Dazu wurden aus den Messdaten die Dichtematrizen der einzelnen Qubit-Paare mittels Tomographie [14] rekonstruiert.

In Abbildung 3.14 wird der Realteil der rekonstruierten Dichtematrix für das Qubit-Paar $Q_a Q_c$ gezeigt. Aus dieser Dichtematrix ist zu erkennen, dass sich das Qubit-Paar $Q_a Q_c$ in einem Gemisch befindet. Der Imaginärteil in der rekonstruierten Dichtematrix ist dabei

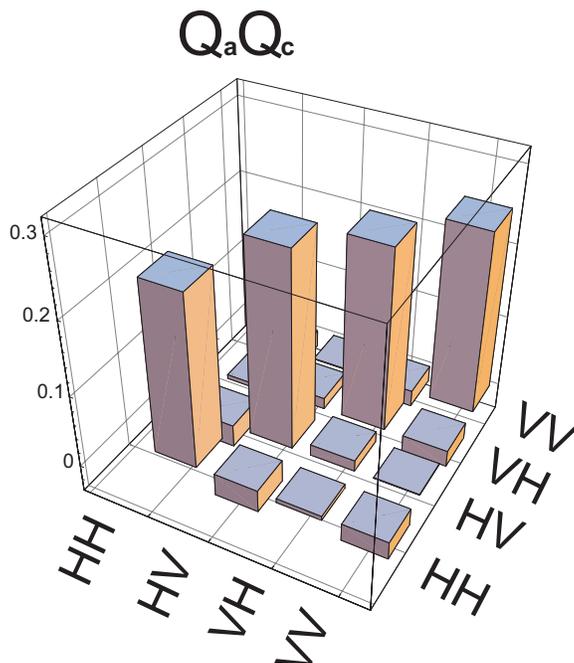


Abbildung 3.14: Die aus den Messdaten bestimmte Dichtematrix des Subsystems $Q_a Q_c$ aus dem beobachteten $|Bell\rangle^{\otimes 2}$ Zustand.

vergleichbar mit dem Untergrund des Realteils. Die Dichtematrix dieses Qubit-Paars $Q_a Q_c$ ist dabei repräsentativ für die Dichtematrizen der restlichen Qubit-Paare $Q_a Q_d$, $Q_b Q_c$ und $Q_b Q_d$.

Um die Separabilität der Subsystem nachzuweisen, wird nun das PPT-Kriterium verwendet, d.h. die rekonstruierten Dichtematrizen wurden partiell transponiert und die Eigenwerte λ der resultierenden Matrix bestimmt. In Tabelle 3.4.1 sind für die einzelnen Subsysteme jeweils der kleinste Eigenwert λ_{min} der partiell transponierten Dichtematrizen aufgelistet.

$Q_i Q_j$	$Q_a Q_c$	$Q_a Q_d$	$Q_b Q_c$	$Q_b Q_d$
λ_{min}	0.199 ± 0.021	0.190 ± 0.021	0.186 ± 0.021	0.185 ± 0.022

Nach dem PPT-Kriterium, welches ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für ein zwei-Qubit System ist, sind somit diese Qubit-Paare als separabel nachgewiesen.

Für die untersuchten Eigenschaften zeigt der beobachtete Zustand die Charakteristika eines $|Bell\rangle^{\otimes 2}$ -Zustands. Für eine weitere Charakterisierung wollen wir nun die Korrelationsfunktion betrachten.

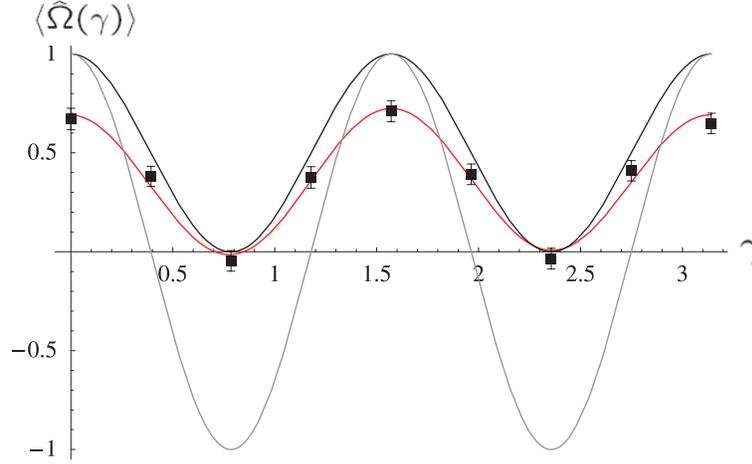


Abbildung 3.15: Die Abbildung zeigt die an die gemessenen Punkte gefittete Korrelationsfunktion (rot) im Vergleich zur theoretisch erwarteten Funktion (schwarz). Die graue Funktion zeigt den idealen Verlauf für einen $|GHZ\rangle$ -Zustand.

3.4.2 GHZ-Korrelationsfunktion und $|\phi^+\rangle \otimes |\phi^+\rangle$

Wie wir bereits am Anfang dieses Abschnitts gesehen haben, kann der $|Bell\rangle^{\otimes 2}$ -Zustand in der Form

$$|Bell\rangle^{\otimes 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|GHZ\rangle + |GHZ\rangle_{ab})$$

dargestellt werden. Für den Erwartungswert erhalten wir somit aus dem $|GHZ\rangle$ -Anteil: $\frac{1}{2} \cos(4\gamma)$ und aus dem Spin gefipten $|GHZ\rangle_{ab}$ -Anteil des Zustands den Offset $\frac{1}{2}$ wodurch sich für den Erwartungswert der Korrelationsfunktion ergibt:

$$\langle \hat{\Omega}(\gamma) \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\gamma) \quad (3.55)$$

Zur experimentellen Bestimmung der Korrelationsfunktion wurde wieder der Erwartungswert für die neun Winkeleinstellungen γ aus (3.27) bestimmt und mit der Funktion aus Gleichung (3.25) gefittet. Das Ergebnis dieser Messreihe ist in Abbildung 3.15 dargestellt. Die aus dem Fit bestimmten Parameter sind:

	experimentell	theoretisch
V_0	0.35 ± 0.02	$\frac{1}{2}$
V_4	0.356 ± 0.03	$\frac{1}{2}$
θ	$0.5^\circ \pm 4.5^\circ$	0°

(3.56)

Mit einer weiteren Messung in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis, konnte mit Hilfe der Gleichung (3.31) die Fidelity des beobachteten Zustands an den $|GHZ\rangle$ -Zustand bestimmt werden. Diese ist:

$$\mathcal{F}(|GHZ\rangle, \hat{\rho}_{exp}) = 0.422 \pm 0.023 \quad (3.57)$$

wobei die Fidelity für den idealen $|Bell\rangle^{\otimes 2}$ -Zustand $\frac{1}{2}$ beträgt.

Die Abweichung von den idealen Werten liegt wieder an der partiellen räumlichen wie spektralen Unterscheidbarkeit der Photonen, wodurch die Kohärenz im Zustand erniedrigt wird.

3.5 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurden drei für den Aufbau ausgezeichnete Zustände beobachtet und charakterisiert. Dabei konnte für jeden dieser Zustände eine gute Übereinstimmung zwischen den theoretischen Vorhersagen und den experimentellen Ergebnissen festgestellt werden. Darüber hinaus konnte bestätigt werden, dass es mit Hilfe des freien Parameters ϕ möglich ist, zwischen den einzelnen Zuständen auszuwählen.

Bei der Charakterisierung des Überlapps mit Hilfe des $|\psi^{(4)}\rangle$ -Zustand konnten die Vorhersagen für den kohärenten und inkohärenten Fall beobachtet werden. Jedoch wurden Effekte beobachtet, die noch einer Erklärung bedürfen.

Bei der Diskussion der Messergebnisse sahen wir, dass die partielle räumliche Unterscheidbarkeit der Photonen am Überlapp-PBS den größten Einfluß auf die Qualität der beobachteten Zustände hat. Deshalb wird der nächste Schritt im Experiment eine Optimierung des Überlapps sein, wodurch wir eine Verbesserung der Güte und der Verschränkung der beobachteten Zustände erwarten.

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit konnte erstmalig gezeigt werden, dass es mit einem experimentellen Aufbau basierend auf der spontanen parametrischen Fluoreszenz kombiniert mit linearer Optik möglich ist, nicht nur einen speziellen, sondern eine Familie von verschränkten Zuständen zu beobachten. Ausgehend von einer theoretischen Betrachtung des optischen Netzwerks konnte gezeigt werden, dass die Familie von Zuständen aus einer Überlagerung von einem $|GHZ\rangle$ mit einem biseparablen Zustand gebildet wird. Der Anteil des jeweiligen Zustands ist einfach mittels eines optischen Elements, nämlich eines $\lambda/2$ -Wellenplättchens, kontinuierlich wählbar. Dies spiegelt die Flexibilität des Versuchsaufbaus wieder und zeigt, dass es durch einen frei wählbaren Parameter möglich ist, einen Zustand aus der Familie von Zuständen auszuwählen. Durch einen Vergleich mit einer Klassifizierung von vier-Qubit Zuständen konnten wir die Familie von Zuständen der Klasse G_{abcd} aus Referenz [11] zuordnen, die sich durch ihre Verschränkungseigenschaften von den anderen dort eingeführten Klassen abgrenzt.

Bei der experimentellen Realisierung nutzten wir vier Photonen, welche in der zweiten Ordnung im Prozess der spontanen parametrischen Fluoreszenz entstehen. Diese wurden mit einem optischen Netzwerk weiter prozessiert. Beim Aufbau und der Justage des optischen Netzwerks war dabei der Überlapp der vier Photonen an einem polarisierenden Stahlteiler zu gewährleisten. Dies wurde mittels der Interferenz von nur zwei Photonen justiert und charakterisiert.

Um die Flexibilität des experimentellen Aufbaus tatsächlich zu zeigen, wählten wir drei ausgezeichnete Zustände aus der Familie von Zuständen aus. Diese drei Zustände waren der vier-Teilchen verschränkte $|GHZ\rangle$ -Zustand, der antisymmetrische vier-Teilchen verschränkte Singulett Zustand $|\psi^{(4)}\rangle$ und ein biseparabler Zustand gebildet aus zwei Bell-Zuständen. Für alle Zustände fanden wir eine Güte größer als 70% zum erwarteten Zustand. Desweiteren konnten wir mittels Witness Operatoren deren charakteristische Vielteilchenverschränkung nachweisen. Einen besonderen Fokus legten wir auf den $|GHZ\rangle$ -Zustand, wo wir mittels einer charakteristischen Korrelationsfunktion dessen besondere Verschränkung aufzeigen konnten.

Nachdem in dieser Arbeit die Realisierung von drei ausgewählten Zuständen mit dem beschriebenen experimentellen Aufbau gezeigt wurde, wird zukünftig die Erforschung noch

nicht realisierter Zustände verfolgt werden. Diese Zustände zeichnen sich durch ihre Korrelationen bzw. besonderen Eigenschaften aus. Desweiteren ist es möglich, nicht nur vier-Teilchen verschränkte Zustände sondern auch zwei-Teilchen Zustände zu betrachten, die durch Verlust zweier Qubits aus den vier-Teilchen verschränkten Zuständen hervorgehen. Da wir mit Hilfe des freien Parameters die Gewichtung zwischen den beiden Anteilen in der beobachtbaren Familie kontrollieren können, kann untersucht werden, ab welcher Gewichtung der beiden Anteile Verschränkung im beobachteten Zustand verloren geht oder auf ein anderes Qubit-Paar übertragen wird. Der experimentelle Aufbau bringt somit noch weitere Möglichkeiten, die Verschränkung der beobachtbaren Zustände eingehend zu untersuchen und zu verstehen.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [2] E. Schrödinger, *Die gegenwärtige Situation der Quantenmechanik*, Die Naturwissenschaften **49** (1935).
- [3] J. Bell, *On the einstein-podolsky-rosen paradoxon*, Physics **1** (1964).
- [4] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter and A. Zeilinger, *Experimental quantum teleportation*, Nature **390**, 575–579 (1997).
- [5] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge University Press, 2000).
- [6] M. Bourennane, M. Eibl, S. Gaertner, C. Kurtsiefer, A. Cabello and H. Weinfurter, *Decoherence-free quantum information processing with four-photon entangled states*, Physical Review Letters **92**, 107901 (2004).
- [7] J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley Publishing Company, 1994).
- [8] R. F. Werner, *Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model*, Phys. Rev. A **40**, 4277–4281 (1989).
- [9] H.-K. Lo and S. Popescu, *Concentrating entanglement by local actions: Beyond mean values*, Phys. Rev. A **63**, 022301 (2001).
- [10] W. Dür, G. Vidal and J. I. Cirac, *Three qubits can be entangled in two inequivalent ways*, Phys. Rev. A **62**, 062314 (2000).
- [11] F. Verstraete, J. Dehaene, B. De Moor and H. Verschelde, *Four qubits can be entangled in nine different ways*, Phys. Rev. A **65**, 052112 (2002).
- [12] N. Kiesel, C. Schmid, G. Toth, E. Solano and H. Weinfurter, *Experimental observation of four-photon entangled Dicke state with high fidelity*, Physical Review Letters **98**, 063604 (2007).

- [13] J.-W. Pan, M. Daniell, S. Gasparoni, G. Weihs and A. Zeilinger, *Experimental demonstration of four-photon entanglement and high-fidelity teleportation*, Phys. Rev. Lett. **86**, 4435–4438 (2001).
- [14] D. F. V. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro and A. G. White, *Measurement of qubits*, Phys. Rev. A **64**, 052312 (2001).
- [15] A. Peres, *Separability criterion for density matrices*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
- [16] M. Bourennane, M. Eibl, C. Kurtsiefer, S. Gaertner, H. Weinfurter, O. Gühne, P. Hylus, D. Bruss, M. Lewenstein and A. Sanpera, *Experimental detection of multipartite entanglement using witness operators*, Physical Review Letters **92**, 087902 (2004).
- [17] M. Lewenstein, B. Kraus, J. I. Cirac and P. Horodecki, *Optimization of entanglement witnesses*, Phys. Rev. A **62**, 052310 (2000).
- [18] B. M. Terhal, *Bell inequalities and the separability criterion*, Phys. Lett. A **271**, 319–326 (2000).
- [19] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki, *Quantum entanglement*, arXiv:quant-ph/0702225 .
- [20] D. S. Kliger, *Polarized light in optics and spectroscopy*, (Academic Press, Inc., 1990).
- [21] C. Kurtsiefer, M. Oberparleiter and H. Weinfurter, *High-efficiency entangled photon pair collection in type-ii parametric fluorescence*, Phys. Rev. A **64**, 023802 (2001).
- [22] M. H. Rubin, *Transverse correlation in optical spontaneous parametric down-conversion*, Phys. Rev. A **54**, 5349–5360 (1996).
- [23] M. Atatüre, A. V. Sergienko, B. M. Jost, B. E. A. Saleh and M. C. Teich, *Partial distinguishability in femtosecond optical spontaneous parametric down-conversion*, Phys. Rev. Lett. **83**, 1323–1326 (Aug 1999).
- [24] W. P. Grice and I. A. Walmsley, *Spectral information and distinguishability in type-ii down-conversion with a broadband pump*, Phys. Rev. A **56**, 1627–1634 (1997).
- [25] N. Kiesel, C. Schmid, U. Weber, G. Toth, O. Gühne, R. Ursin and H. Weinfurter, *Experimental analysis of a four-qubit photon cluster state*, Physical Review Letters **95**, 210502 (2005).
- [26] M. Oberparleiter, *Effiziente Erzeugung verschränkter Photonenpaare*, Doktorarbeit, Fakultät für Physik an der LMU München (2002).
- [27] J. Altepeter, E. R. Jeffrey and P. G. Kwiat, *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics*, (Elsevier, 2005).

-
- [28] C. K. Hong, Z. Y. Ou and L. Mandel, *Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference*, Phys. Rev. Lett. **59**, 2044–2046 (1987).
- [29] C. I. T. Schmid, *Kompakte Quelle verschränkter Photonen und Anwendung in der Quantenkommunikation*, Diplomarbeit, LMU München (2004).
- [30] M. Hein, J. Dr, W. and Eisert, R. Raussendorf, M. Van den Nest and H.-J. Briegel, *Entanglement in graph states and its applications*, arXiv:quant-ph/0602096v1 .
- [31] G. Toth and O. Gühne, *Entanglement detection in the stabilizer formalism*, Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics) **72**, 022340 (2005).
- [32] C. A. Sackett, D. Kielpinski, B. E. King, C. Langer, V. Meyer, C. J. Myatt, M. Rowe, Q. A. Turchette, W. M. Itano, D. J. Wineland and C. Monroe, *Experimental entanglement of four particles*, Nature **404**, 256–259 (2000).
- [33] C.-Y. Lu, X.-Q. Zhou, O. Gühne, W.-B. Gao, J. Zhang, Z.-S. Yuan, A. Goebel, T. Yang and J.-W. Pan, *Experimental entanglement of six photons in graph states*, Nat Phys **3**, 91–95 (2007).
- [34] O. Gühne, P. Hyllus, D. Bruß, A. Ekert, M. Lewenstein, C. Macchiavello and A. Sanpera, *Detection of entanglement with few local measurements*, Phys. Rev. A **66**, 062305 (2002).
- [35] O. Gühne, P. Hyllus, D. Bruss, A. Ekert, M. Lewenstein, C. Macchiavello and A. Sanpera, *Experimental detection of entanglement via witness operators and local measurements*, J. Mod. Optic. **50**, 1079–1102 (2003).

Abbildungsverzeichnis

1.1	Mit Hilfe der Blochkugel kann der Zustand $ \psi\rangle$ eines Qubits graphisch dargestellt werden.	2
1.2	Zur Veranschaulichung der Menge der Messbasen $ \gamma^+\rangle/ \gamma^-\rangle$	4
1.3	Schematische Darstellung der Verschränkungsklassen in einem drei-Qubit System, wobei die Qubits mit A, B und C bezeichnet werden. Die Pfeile verdeutlichen die nicht reversiblen Transformationen zwischen den Klassen.	8
1.4	Geometrische Veranschaulichung, wie durch den Witness Operator \hat{W} die Verschränkung eines Zustands ρ nachgewiesen werden kann.	13
2.1	Der schematische Aufbau des Experiments, zur Beobachtung der Familie von Zuständen $ \psi(\phi)\rangle$	16
2.2	Beobachtungs-Wahrscheinlichkeit $prob(\phi)$ der Zustände $ \psi(\phi)\rangle$ in Abhängigkeit von der Winkelposition des $\lambda/2$ -Wellenplättchens.	17
2.3	Betragsquadrate der Amplituden des $ GHZ\rangle$ -Anteils (blau) und des $ \psi^+\rangle \otimes \psi^+\rangle$ -Anteils (schwarz) im Zustand $ \psi(\phi)\rangle$ in Abhängigkeit der Winkelposition der $\lambda/2$ -Wellenplättchens.	18
2.4	Skizze des gesamten experimentellen Aufbaus, bestehend aus Photonenquelle für den Eingangszustand $ in\rangle$ und dem optischen Netzwerk.	20
2.5	Skizze der Photonenquelle, bestehend aus einem Lasersystem und dem BBO-Kristall, zur Erzeugung des vier-Photonen Eingangszustands $ in\rangle$	21
2.6	Die Abbildung zeigt eine schematische Darstellung der SPDC. Durch die zwei Schnittgeraden werden die Moden a und c definiert.	22
2.7	Veranschaulichung zur Justage des Kopplers A, parallel zur Bewegungsrichtung des Verschiebetisches unter Verwendung eines zweiten Kopplers K_1	24
2.8	Gemessene Kopplungsgüte in Abhängigkeit der Position z des Verschiebetisches.	24
2.9	Koordinatensystem des Überlapp-PBS mit der rot hervorgehobenen dielektrischen Grenzschicht.	25
2.10	Veranschaulichung zur Justage des Überlapp-PBS.	27
2.11	Positionierung des Kopplers C mit Hilfe zweier Lochblenden auf seine durch die Platzierung des Überlapp-PBS definierte Position.	28

2.12	Zur Charakterisierung des Überlapps wird der Justagelaser mit einem Faserstrahlteiler in zwei kohärente Strahlen aufgeteilt. Der Kontrast des Interferenzmusters gibt dabei Aufschluss über die Güte des Überlapps.	29
2.13	Ergebnisse eines groben und feinen Scans. Der Kontrast des beobachteten Interferenzmusters beträgt 82%.	29
2.14	Die Abbildung zeigt die Intensitäten in den Moden a und c nach dem Überlapp-PBS in Abhängigkeit von der Winkelposition ϕ und des Offsets $\bar{\phi}$ des $\lambda/2$ -Wellenplättchens, bezogen auf die gesuchte Null-Position.	30
2.15	Das Aufteilungsverhältnis eines BS hängt von seiner relativen Orientierung zum Stahl ab.	32
2.16	Der Aufbau einer Polarisationsanalyse, bestehend aus QWP, HWP einem PBS und zwei Detektoren, welche die Information über das Messergebnis liefern.	32
2.17	Veranschaulichung einer Effizienzmessung woraus die benötigten Parameter zur Berechnung der rel. Effizienzen η^i abgeleitet werden können.	35
2.18	Theoretischer Verlauf der Koinzidenzzählrate $c(+ +)$ bzw. $c(- -)$ in Abhängigkeit der Position z des Kopplers A.	38
2.19	Das Ergebnis einer Messung für die Zählraten $c(+ +)$ und $c(+ -)$, mit einer Visibility von $\mathcal{V}^{+/+} = 0.896 \pm 0.019$ und $\mathcal{V}^{+/-} = 0.82 \pm 0.028$	39
2.20	Darstellung der Phasenschübe $e^{i \cdot Mode_{Pol}}$ durch den Überlapp-PBS in Abhängigkeit von der Eingangsmode a , c und der Polarisation der Photonen.	39
2.21	Ergebnis der Messung für die Zählrate $c(+ +)$, nach der Kompensation der Phase $e^{i\alpha_{PBS}}$ des Überlapp PBS mit dem YVO_4 -Kristall-Paar. Die Visibility beträgt: $\mathcal{V} = 0.92 \pm 0.047$	40
3.1	Vierfach koinzidenz Zählraten für den beobachteten Zustand (rot) im Vergleich mit den theoretisch erwarteten Zählraten (grau). Die Korrelation K_{zzzz}^{exp} beträgt dabei 0.903 ± 0.028	44
3.2	Messergebnisse (rot) für den beobachteten Zustand, analysiert in der $\hat{\sigma}_x$ und $\hat{\sigma}_y$ -Basis. Die Korrelationen betragen dabei $K_{xxxx}^{exp} = 0.783 \pm 0.027$ und $K_{yyyy}^{exp} = 0.710 \pm 0.027$	45
3.3	Die neun Messwerte der Korrelationsfunktion $\hat{\Omega}(\gamma)$ wurden mit der erwarteten Funktion $\langle \hat{\Omega}(\gamma) \rangle$ gefittet (rot). Die graue Kurve ist dabei der Erwartungswert der Korrelationsfunktion für den idealen $ GHZ\rangle$ -Zustand. Die Phasenverschiebung im beobachteten Zustand beträgt $\theta = 0.6^\circ \pm 1.6^\circ$. . .	50
3.4	Die experimentell bestimmte Korrelationsfunktion für den $ GHZ^-\rangle$ -Zustand (rot) im Vergleich mit der erwarteten (schwarz). Die grüne Kurve zeigt den Erwartungswert der Korrelationsfunktion für einen idealen $ GHZ\rangle$ -Zustand, woraus die Antikorrelation der beiden orthogonalen Zustände deutlich wird.	51
3.5	Ergebnis der Messung (rot) in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis im Vergleich zum idealen $ \psi^{(4)}\rangle$ -Zustand. Die exp. Korrelation beträgt $K_{zzzz}^{exp} = 0.968 \pm 0.056$	53

3.6	Ergebnis der Messungen in der $\hat{\sigma}_x$ (links) und $\hat{\sigma}_y$ -Basis (rechts) im Vergleich zum idealen $ \psi^{(4)}\rangle$ -Zustand. Die Korrelationen betragen hierbei $K_{xxxx}^{exp} = 0.825 \pm 0.061$ und $K_{yyyy}^{exp} = 0.791 \pm 0.058$	54
3.7	Die Abbildung zeigt die an die gemessenen Punkte gefittete Korrelationsfunktion (rot) im Vergleich zur theoretisch erwarteten Funktion (schwarz). Die graue Funktion zeigt den idealen Verlauf für einen $ GHZ\rangle$ -Zustand. . .	55
3.8	Vergleich der beobachteten Zählraten für ein kohärente und inkohärente Überlagerung der Photonen am Überlapp-PBS.	58
3.9	Die zwei- und vierfach Zählraten $c(- -)$ und $c(+ - -)$ in Abhängigkeit der Position z der Kopplers A, woraus die unterschiedliche Breite (FWHM) zu erkennen ist.	59
3.10	Abhängigkeit der vierfach Zählraten $c(+ + - -)$ von der Position z der Kopplers A mit einem Verhältnis von inkohärenter- zu kohärenter Zählrate von $V=4.88 \pm 0.17$	60
3.11	Messergebnis für das Ereigniss $(- + - +)$. Dieses stellt einen typischen Verlauf des Scans für die Events $(+ - - +)$, $(+ - - +)$ und $(- + + -)$ dar. Das Verhältnis von inkohärenter- zu kohärenter Zählrate ist dabei 1.27 ± 0.07 was gut mit dem theoretischen Wert von $1\frac{1}{3}$ übereinstimmt.	61
3.12	Messergebnis (rot) für den beobachteten Zustand im Vergleich zum idealen $ Bell\rangle^{\otimes 2}$ -Zustand (grau). Die Korrelation K_{zzzz}^{exp} beträgt dabei 0.957 ± 0.053	62
3.13	Messergebnisse (rot) für den beobachteten Zustand, analysiert in der $\hat{\sigma}_x$ und $\hat{\sigma}_y$ -Basis. Die Korrelationen betragen dabei $K_{XXXX}^{exp} = 0.711 \pm 0.053$ und $K_{YYYY}^{exp} = 0.649 \pm 0.052$	63
3.14	Die aus den Messdaten bestimmte Dichtematrix des Subsystems $Q_a Q_c$ aus dem beobachteten $ Bell\rangle^{\otimes 2}$ Zustand.	66
3.15	Die Abbildung zeigt die an die gemessenen Punkte gefittete Korrelationsfunktion (rot) im Vergleich zur theoretisch erwarteten Funktion (schwarz). Die graue Funktion zeigt den idealen Verlauf für einen $ GHZ\rangle$ -Zustand. . .	67

Tabellenverzeichnis

3.1	Liste der Korrelationen, welche in die Berechnung der Fidelity $\mathcal{F}(GHZ\rangle, \rho_{exp})$ eingehen.	46
3.2	Vergleich der erwarteten vier-fach Zählraten, für die am PBS kohärent und inkohärent überlagerten Photonen. Aus der Tabelle wird ersichtlich, dass außerhalb des Dips die Gesamtzählrate auf alle möglichen Zählraten gleich verteilt ist. Im kohärenten Fall sind theoretisch nur die Zählraten zu beobachten, die einen entsprechenden Term im $ \psi^{(4)}\rangle$ -Zustand haben.	57
3.3	Liste der relevanten Korrelationen für die Berechnung der Fidelity $\mathcal{F}(Bell\rangle, \hat{\rho}_{exp})$ des $ Bell\rangle^{\otimes 2}$ -Zustands. Die ersten neun Korrelationen entsprechen dabei den Messsettings.	64
3.4	Die experimentell bestimmte Fidelities der Qubit-Paare $Q_i Q_j$ an den $ \phi^+\rangle_{ij}$ -Zustand im Vergleich zur theoretischen Wert. Die Indizes beziehen sich dabei auf die räumliche Mode der Qubits.	65

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all denjenigen herzlichst danken, die mich im letzten Jahr begleiteten und unterstützten. Besonderer Dank gilt dabei:

Prof. Harald Weinfurter, der es mir ermöglichte an einem aktuellen und interessanten Thema der Physik mitzuarbeiten.

Witlef Wieczorek, Christian Schmid, Nikolai Kiesel und Pavel Trojek die mir stets hilfreich zur Seite standen und mir, durch Diskussionen und Anregungen, den Blick fürs Wesentliche lehrten.

Meinen lieben Eltern, die mich nicht nur während dieses Jahres unterstützten, sondern mir das Studium der Physik erst ermöglichten.

Meinen beiden Schwestern Imel und Heidi, für die netten Telefonate am Ende der Diplomarbeit.

Meiner Freundin Heidi, für die liebevolle Unterstützung.

Erklärung:

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

München, den 22. Juni 2007 _____