

Interferometrie mit mehreren verschränkten Qubits

Bachelorarbeit

FAKULTÄT FÜR PHYSIK
LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Harald Weinfurter



Martin Reitter

München, den 12. Juli 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Theoretischer Hintergrund	2
2.1	Das EPR-Paradoxon	2
2.2	Bell's Theorem	3
2.3	Nichtkontextualität anstatt Lokalität	5
2.4	Widerlegung von NCHV-Theorien mithilfe eines GHZ-Zustands	5
2.4.1	Erzeugung des GHZ-Zustandes	6
2.4.2	Analyse des Zustandes und Widerspruch zu NCHV-Theorien	7
2.5	Belltest und CHSH	10
2.6	Zustandstomographie	10
3	Das Experiment	13
3.1	Aufbau der Quelle	13
3.2	Zustandstomographie der Quelle	14
3.3	Aufbau des Interferometers	15
3.4	Justage des Interferometers	17
3.4.1	Justage der Strahlüberlappung	17
3.4.2	Abgleich der Armlängen	17
3.4.3	Justage der Polarisierung	17
3.5	Zustandstomographie des im Interferometer präparierten Zustands	18
3.6	Messungen zur Widerlegung NCHV-Theorien	22
3.6.1	Widerlegung von NCHV-Theorien mithilfe eines GHZ-Zustands	23
3.6.2	Verletzung der Nichtkontextualität mithilfe einer Bell-CHSH-Ungleichung	28
4	Zusammenfassung und Ausblick	30

1 Einführung

Ziel dieser Arbeit war die Fortführung von in [1] begonnen Experimenten zu Hyperentanglement mit Hilfe eines Michelson-Interferometers. Als erstes wurde dazu getestet, ob die Phasenstabilität des Interferometers ausreichend ist, Experimente durchzuführen, mit denen sogenannte “Noncontextual hidden variable”-Theorien (engl. für nicht-kontextuelle verborgene Variablen NCHV) ausgeschlossen werden können. Hierfür wurde eine Zustandstomographie an einem bekannten Zustand durchgeführt.

Die Zustandstomographie ist ein Verfahren, durch welches man die Dichtematrix, die sämtliche Information über einen Zustand, der aus einem oder mehreren Qubits besteht, enthält, experimentell bestimmen kann. Durch eine Zustandstomographie zeigt sich insbesondere, wie gut der theoretische und der im Experiment präparierte Zustand übereinstimmen. Die hier erwähnten Qubits sind quantenmechanische Zwei-Niveau-Systeme und bilden somit das quantenmechanische Analogon zu einem klassischen Bit.

Diese Qubits unterscheiden sich von diesem allerdings darin, dass sie anstelle der beiden klassischen Werte $|0\rangle$ und $|1\rangle$ auch jede beliebige Superposition $|Qubit\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, annehmen können. Ein solches Qubit wird in dieser Arbeit durch die horizontale bzw. vertikale Polarisation eines Photons repräsentiert.

Die anderen beiden Experimente, die nach der Zustandstomographie durchgeführt wurden, befassen sich mit den bereits erwähnten NCHV-Theorien. Diesen NCHV-Theorien liegt ein realistisches Weltbild zugrunde, welches besagt, dass die Messergebnisse einer Messung a priori feststehen.

Aufgrund dieser Tatsache ergeben sich für bestimmte Experimente unterschiedliche Voraussagen zwischen der Quantenmechanik und solchen NCHV-Theorien.

2 Theoretischer Hintergrund

2.1 Das EPR-Paradoxon

Im Jahre 1935 veröffentlichten Albert Einstein, Boris Podolski und Nathan Rosen (EPR) einen Artikel [2] in dem sie zeigten, dass die Beschreibung eines Systems in der Quantenmechanik durch eine Wellenfunktion Ψ ihrer Ansicht nach nicht vollständig sein kann. Dazu mussten sie zwei Postulate aufstellen, die die Vollständigkeit einer physikalischen Theorie und ein Element der physikalischen Realität beschreiben. EPR definierten eine vollständige Theorie wie folgt:

Jedes Element der physikalischen Realität muss eine Entsprechung in der physikalischen Theorie haben. [2]

Des Weiteren definierten sie:

Wenn es, ohne ein System in irgendeiner Weise zu stören, möglich ist, mit Sicherheit (d.h. Wahrscheinlichkeit 1) den Wert einer physikalischen Größe vorauszusagen, dann existiert ein Element der physikalischen Realität, das dieser physikalischen Größe entspricht. [2]

Um das Argument von EPR zu veranschaulichen betrachten wir folgendes Beispiel:

Eine Teilchenquelle [3] emittiere zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in entgegengesetzte Richtungen, die sich in folgendem verschränkten¹ Zustand befinden²

$$|\Psi_{ges}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\uparrow_2\rangle), \quad (2.1)$$

wobei die Indizes angeben, um welches der beiden Teilchen es sich handelt. Wird eine Messung des Spins in der x-Richtung durchgeführt, wird der Spin des Elektrons entweder auf die positive x-Richtung $|\uparrow\rangle_x$ oder auf die negative x-Richtung $|\downarrow\rangle_x$ projiziert. Gleiches gilt auch für Spinmessungen in jeder beliebigen Basis \vec{a} ³. Wird nun eine Messung des Spins am ersten Teilchen in der z-Richtung ($\vec{\sigma}_z$) durchgeführt, erhält man ebenfalls entweder das Ergebnis $|\uparrow\rangle_z$ oder $|\downarrow\rangle_z$. Da die beiden Teilchen miteinander verschränkt waren, können wir mit Sicherheit den Zustand des zweiten Teilchens voraussagen, denn durch die Messung an Teilchen 1 verändert sich der Zustand von

¹Für einen verschränkten Zustand gilt: $|\Psi_{verschränkt}\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ [4]

²Im originalen Artikel wurde der Ort und der Impuls eines Teilchens betrachtet, die Argumentation lässt sich allerdings äquivalent für den Spin eines Teilchens betrachten.

³Alle folgenden Vektoren sind stets als Einheitsvektoren zu verstehen.

$|\Psi_{ges}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\uparrow_2\rangle)$ zu $|\Psi'_{ges}\rangle = |\uparrow_1\downarrow_2\rangle_{\vec{a}}$ bzw. $|\Psi''_{ges}\rangle = |\downarrow_1\uparrow_2\rangle_{\vec{a}}$ je nachdem welcher Spin des ersten Teilchens gemessen wurde. Dies wird auch als Kollaps der Wellenfunktion bezeichnet. Da die beiden Messungen so weit voneinander entfernt sind, dass die Information der einen Messung, die andere nicht erreichen kann bevor auch hier eine Messung durchgeführt wird, kann eine Wechselwirkung der beiden Elektronen, die maximal mit Lichtgeschwindigkeit propagiert, ausgeschlossen werden. Es kann also rein theoretisch das Ergebnis der Messung am zweiten Teilchen vorhergesagt werden, falls sich beide Experimentatoren im Voraus über die Messoperatoren geeinigt haben. Folglich ist, laut obiger Definition, der Spin des zweiten Teilchens in z-Richtung ein Element der physikalischen Realität. Die selben Messungen lassen sich allerdings auch in der x-Richtung durchführen und folglich muss auch der Spin in x-Richtung ein Element der physikalischen Realität sein. Da die beiden Spinoperatoren \hat{S}_x und \hat{S}_y nicht miteinander kommutieren, ist es nicht möglich beide Spineigenschaften mit beliebiger Genauigkeit gleichzeitig einer Wellenfunktion zuzuordnen. Da aber beide ein Element derselben physikalischen Realität sind, kann die Beschreibung des Systems durch eine Wellenfunktion nicht vollständig sein. EPR waren von ihrer Argumentation überzeugt, konnten allerdings keinen Ansatz liefern, wie eine solche Theorie aussehen müsste.

2.2 Bell's Theorem

Erst 29 Jahre später konnte John Bell ein Theorem aufstellen, welches die Eigenschaften von EPR beinhaltet. Dies lag auch daran, dass von Neumann 1932 einen Beweis aufstellte, welcher besagte, dass es unmöglich sei solch eine Verborgene-Variablen-Theorie aufzustellen. Wie sich allerdings herausstellte, war der Beweis auf falschen Annahmen aufgebaut[5].

Bell löst das vermeintliche Problem einer unvollständigen Beschreibung eines Zustands, indem er zusätzlich eine Variable λ einführt, die den Zustand eines Systems vollständig beschreiben soll. Dabei spielt es keine Rolle, ob λ eine einzelne Variable, eine Funktion oder ob die Variable diskret oder kontinuierlich ist[6].

Wir wollen jetzt wieder ein Teilchenpaar wie oben betrachten. Wie bereits erwähnt hängt das Ergebnis A einer Messung an Teilchen 1 wieder von der Richtung \vec{a} ab, in der die Messung durchgeführt wird. Gleiches gilt für Teilchen 2 dessen Messergebnis wir mit B bezeichnen wollen. Zusätzlich hängen beide Messergebnisse von der Variablen λ ab, sodass Folgendes gilt

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1. \quad (2.2)$$

Daraus ergibt sich der Erwartungswert einer Messung an beiden Teilchen zu

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \int A(\vec{a}, \lambda)B(\vec{b}, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \quad (2.3)$$

wobei $\rho(\lambda)$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung von λ ist mit

$$\int \rho(\lambda)d\lambda = 1. \quad (2.4)$$

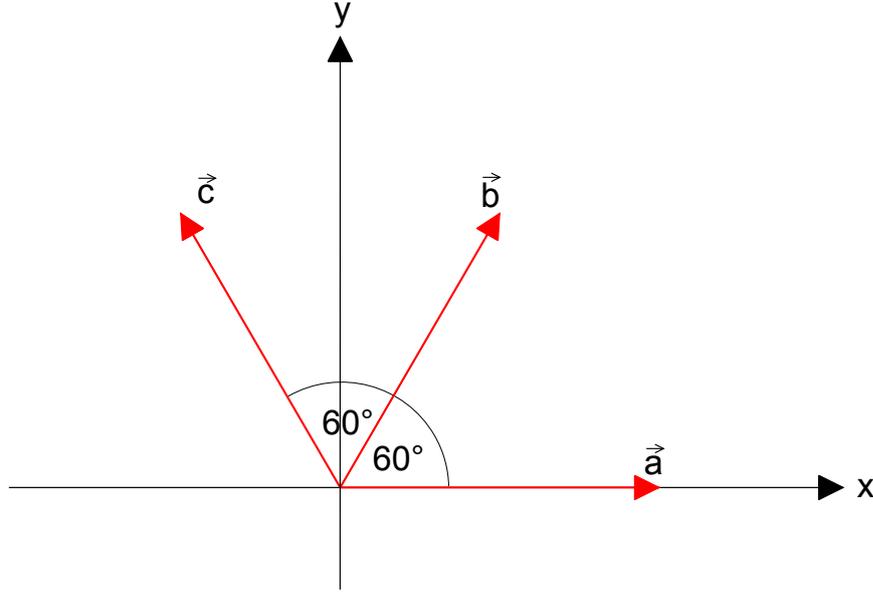


Abbildung 2.1: Mit diesen drei Messrichtungen ist eine maximale Verletzung der Bellschen Ungleichung gegeben.

Unter der Annahme der Lokalität kann man leicht erkennen, dass Bell damit der Forderung von EPR nachgekommen ist, wonach das Ergebnis einer Messung A unabhängig von der Richtung einer Messung B ist. Da für den Zustand (2.1) eine perfekte Antikorrelation erwartet wird, muss Folgendes gelten

$$A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{a}, \lambda). \quad (2.5)$$

Mit diesen vier Bedingungen lässt sich zeigen, dass folgende Ungleichung gelten muss

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + E(\vec{b}, \vec{c}). \quad (2.6)$$

Diese Ungleichung ist auch als Bellsche Ungleichung bekannt. Um einen möglichen Widerspruch mit der Quantenmechanik zu erhalten, muss noch der quantenmechanische Erwartungswert bestimmt werden, welcher sich zu

$$E_{QM}(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b} = -\cos(\Phi) \quad (2.7)$$

ergibt, wobei Φ der Winkel zwischen den beiden Einheitsvektoren \vec{a} und \vec{b} ist. Wählt man z.B. die Messrichtungen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so, wie in Bild 2.1, dass der Winkel zwischen \vec{a}, \vec{b} und \vec{b}, \vec{c} 60° und der Winkel zwischen \vec{a}, \vec{c} 120° entspricht, erhalten wir folgende Erwartungswerte

$$E_{QM}(\vec{a}, \vec{b}) = E_{QM}(\vec{b}, \vec{c}) = -\frac{1}{2}, \quad E_{QM}(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{1}{2}.$$

Setzt man diese Werte in die Ungleichung (2.6) ein, erhält man einen Widerspruch. Es ist also prinzipiell möglich durch Experimente einen Widerspruch zwischen den

Annahmen von EPR und der Quantenmechanik zu messen. Alle bis zum heutigen Zeitpunkt durchgeführten Experimente bestätigen die Quantenmechanik und somit kann davon ausgegangen werden, dass ein quantenmechanischer Zustand vollständig durch seine Wellenfunktion beschrieben wird.

2.3 Nichtkontextualität anstatt Lokalität

Bisher wurde immer davon ausgegangen, dass die Messungen an den beiden Teilchen soweit voneinander entfernt sind, dass eine Wechselwirkung der beiden Teilchen, die maximal mit Lichtgeschwindigkeit propagiert, ausgeschlossen werden kann. Man kann allerdings auch folgende Sichtweise des Problems haben. Verborgene-Variablen-Theorien nehmen an, dass das Messergebnis einer Messung A bereits vor dieser Messung existiert. Folglich sollte das Ergebnis der Messung A unabhängig davon sein, welche Messungen B,C zusätzlich an dem System durchgeführt werden, wobei beachtet werden muss, dass die Observablen A,B,C miteinander kommutieren, also gleichzeitig messbar sind[5]. Folglich sollte das Ergebnis der Messung A identisch bleiben wenn wir zwei andere Observablen D,E messen, die ebenfalls mit A kommutieren aber nicht notwendigerweise mit B,C kommutieren müssen. Diese Annahmen für eine Verborgene-Variablen-Theorie wird unter dem Begriff Nichtkontextualität verstanden. Es stellt sich nur noch die Frage, ob die oben gemachten Annahmen mit den Ergebnissen der Quantenmechanik vereinbar sind.

Im folgenden wollen wir uns nur noch mit dieser Art von Verborgenen-Variablen-Theorien, den sogenannten nichtkontextuellen Verborgenen-Variablen-Theorien, beschäftigen.

2.4 Widerlegung von NCHV-Theorien mithilfe eines GHZ-Zustands

Um mithilfe einer bellartigen Ungleichung einen Widerspruch zwischen der Quantenmechanik und NCHV-Theorien zeigen zu können, müssen nicht perfekte Korrelationen, also $|E_{QM}(\vec{a}, \vec{b})| < 1$ betrachtet werden. Man kann hier also nicht direkt das Ergebnis einer zweiten Messung vorhersagen, sondern nur statistische Aussagen treffen. Das Argument von EPR nahm allerdings perfekte Korrelation zwischen zwei Messungen an. Betrachtet man in der Bellschen Ungleichung perfekte Korrelationen, ergibt sich kein Widerspruch zwischen EPR's Ansatz und der Quantenmechanik. Mithilfe eines speziellen Dreiteilchenzustands, einem sogenannten GHZ-Zustand[7] (benannt nach Greenberger, Horne und Zeilinger), kann man auch für perfekte Korrelation einen Widerspruch zwischen dem Ansatz von EPR und der Quantenmechanik zeigen. Ein weiterer Vorteil ist, dass der Widerspruch theoretisch ohne Ungleichungen auskommt, praktisch allerdings nicht, da experimentelle Werte niemals eine perfekte Korrelation zeigen.

2.4.1 Erzeugung des GHZ-Zustandes

Durch spontane parametrische Fluoreszenz werden aus einem blauen Photon zwei rote Photonen erzeugt. Diese beiden roten Photonen sind im Polarisationsfreiheitsgrad miteinander verschränkt. Im Allgemeinen gibt es zwei verschiedene Typen von spontan parametrischer Fluoreszenz[8]:

Typ I: Eine Typ I Quelle besteht aus einem Kristall, dessen optische Achse so ausgerichtet ist, dass ein einlaufender Pumpstrahl außerordentlich zu dieser polarisiert ist. Die entstandenen Fluoreszenzphotonen sind beide ordentlich polarisiert.

Typ II: Bei dieser Quelle ist der Pumpstrahl wieder außerordentlich polarisiert, die beiden Fluoreszenzphotonen sind jedoch orthogonal zueinander polarisiert, d.h. das eine ist ordentlich und das andere außerordentlich polarisiert.

Die in diesem Versuch benutzte Quelle besteht aus zwei Typ I β -Bariumborat Kristallen (BBO), die um 90° zueinander gedreht sind. Damit der Pumpstrahl beide Kristalle mit gleicher Wahrscheinlichkeit pumpen kann, muss dieser diagonal polarisiert sein. Folglich kann der Pumpstrahl durch $|\psi_{pump}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$ beschrieben werden, wobei $|H\rangle$ horizontal-, und $|V\rangle$ vertikal polarisierte Photonen beschreibt. Die optische Achse des ersten Kristalls ist so ausgerichtet, dass er durch vertikal polarisierte Photonen gepumpt wird. Die dabei entstandenen Photonenpaare befinden sich somit im Zustand $|\psi_1\rangle = |H_1\rangle |H_1\rangle$. Der zweite Kristall wird folglich durch horizontal polarisierte Photonen gepumpt und die in diesem Kristall entstandenen Photonenpaare befinden sich im Zustand $|\psi_2\rangle = |V_2\rangle |V_2\rangle$. Des Weiteren muss beachtet werden, dass bei dem Prozess der spontanen parametrischen Fluoreszenz Energie- und Impulserhaltung gelten muss

$$\begin{aligned}\omega_{pump} &= \omega_s + \omega_i \\ \vec{k}_{pump} &= \vec{k}_s + \vec{k}_i\end{aligned}$$

wobei die beiden Indizes s und i für “signal” und “idler” stehen. Aufgrund der Impulserhaltung müssen die beiden entstandenen Photonen entlang eines Kegels emittiert werden. Die beiden Kristalle sind so angeordnet, dass sich ihre Emissionskegel überlappen. Da der Brechungsindex für den außerordentlichen und den ordentlichen Strahl in einem doppelbrechenden Kristall unterschiedlich ist, sammeln die beiden Strahlen eine unterschiedliche Phase auf. Um diese zu kompensieren ist vor den beiden BBO-Kristallen ein weiterer Doppelbrechenden Yttriumvanadat-Kristall (YVO_4) montiert. Dieser verschiebt die Phase zwischen $|H\rangle$ und $|V\rangle$ der Pumpphotonen so, dass nach den beiden BBO-Kristallen die Phase zwischen den emittierten Photonen Null ist.

Da die entstandenen Photonen nur dann miteinander verschränkt sind, wenn man sie nicht voneinander unterscheiden kann, müssen die Photonen an zwei gegenüberliegenden Punkten des Emissionskegels aufgesammelt werden.

Damit die beiden Photonen nicht durch ihre Detektionszeit unterschieden werden können, müssen die beiden BBO-Kristalle so nah aneinander liegen, dass die Zeit, die

das Licht braucht um beide Kristalle zu passieren, kleiner als die Kohärenzzeit des Pumplasers ist.

Um die Verschränkung der beiden Photonen noch weiter zu verbessern, wurden noch zwei Frequenzfilter in die Quelle eingebaut.

Der emittierte Gesamtzustand kann durch

$$|\Psi_{Quelle}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_2\rangle |H_1\rangle + |V_2\rangle |V_1\rangle) |l_2\rangle |r_1\rangle, \quad (2.8)$$

beschrieben werden, wobei l, r die Ausbreitungsrichtungen der Photonen sind. Photon 1 gelangt über eine Singlemode-Faser in ein Michelsoninterferometer, während Photon 2 nach einer Polarisationsanalyse auf einen Einzelphotonendetektor trifft. Im Interferometer trifft das Photon 1 auf einen polarisierenden Strahlteiler (PBS engl. für polarizing beam splitter), der so orientiert ist, dass H-polarisiertes Licht transmittiert und V-polarisiertes Licht reflektiert wird. Der Zustand nach dem PBS lässt sich also wie folgt schreiben,

$$|\Psi_{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_2\rangle |H_1\rangle |a_1\rangle + |V_2\rangle |V_1\rangle |b_1\rangle) |l_2\rangle \quad (2.9)$$

wobei a, b die beiden räumlichen Moden des Interferometers, wie in Abbildung 2.1 gezeigt, beschreiben. Der Term in der Klammer des Zustands hat die Struktur eines Dreiteilchen GHZ Zustands.

2.4.2 Analyse des Zustandes und Widerspruch zu NCHV-Theorien

Bevor wir uns mit den widersprüchlichen Aussagen zwischen Quantenmechanik und NCHV-Theorien befassen, betrachten wir die Analyse des Zustands. In diesem Experiment können drei kommutierende Observablen gleichzeitig bestimmt werden. Die Observable $\hat{A}(\Phi_A)$ gibt den Ausgang an, durch welchen das Photon das Interferometer verlässt. Die Observable $\hat{B}(\Phi_B)$ ist die Polarisation des ersten Photons nach dem Interferometer und die Observable $\hat{C}(\Phi_C)$ die Polarisation des zweiten Photons. Die Eigenwerte von $\hat{A}(\Phi_A)$ seien $A = \pm 1$, wobei der untere Ausgang des Interferometers dem Eigenwert $+1$ entspricht. Die Eigenwerte der Observablen $\hat{B}(\Phi_B)$, $\hat{C}(\Phi_C)$ seien ebenfalls $B = \pm 1$, $C = \pm 1$ wobei der Eigenwert $+1$ bedeutet, dass die Polarisatoren auf $|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$ eingestellt sind und für -1 auf $|\bar{D}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle)$. Der Strahlteiler (BS engl. für beam splitter) erzeugt aus den beiden Moden $|a\rangle$ und $|b\rangle$ im Interferometer die beiden Ausgangsmoden

$$|A, \Phi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(iAe^{i\Phi_A} |a_1\rangle + |b_1\rangle), \quad (2.10)$$

wobei A hier wieder die beiden Werte ± 1 annehmen kann. Mithilfe des $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchens und des Polarisators lässt sich der Ausgangszustand nach dem Interferometer auf

$$|B, \Phi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V_1\rangle + Be^{i\Phi_B} |H_1\rangle) \quad (2.11)$$

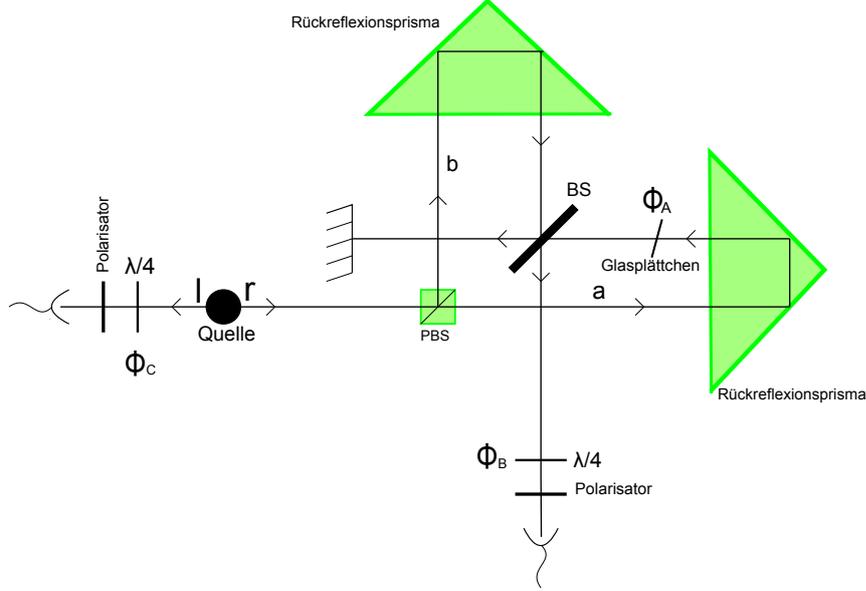


Abbildung 2.2: Schematischer Aufbau des Experiments. Die in der Quelle emittierten Photonen werden in zwei unterschiedliche Richtungen abgestrahlt. Während das eine Photon direkt detektiert wird, durchläuft das andere ein Michelson-Interferometer. Die mit diesem Aufbau gemessenen Observablen sind die Polarisationen der beiden Photonen und die Propagationsrichtung des ersten Photons nach dem BS.

projizieren. Gleiches gilt auch für die Observable $\hat{C}(\Phi_C)$, die den Zustand des zweiten Photons wie folgt festlegt:

$$|C, \Phi_C\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V_2\rangle + C e^{i\Phi_C} |H_2\rangle). \quad (2.12)$$

Den Phasenschub Φ_A zwischen den beiden Armen des Interferometers kann man durch Verkippen eines Glasplättchen in Arm a des Interferometers verändern[1]. Die Phasen Φ_B und Φ_C lassen sich durch das $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen vor den Polarisatoren einstellen.

Um die quantenmechanischen Erwartungswerte berechnen zu können, ist von Interesse, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Photon in einem bestimmten Zustand detektiert wird. Diese Wahrscheinlichkeit ergibt sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} P_{A,B,C}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) &= |(\langle A, \Phi_A | \langle B, \Phi_B | \langle C, \Phi_C | |\Psi_{GHZ}\rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{4} (i + ABC e^{i(\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C)}) \right|^2 \\ &= \frac{1}{8} [1 + ABC \sin(\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C)]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Der Erwartungswert lässt sich aus den Messwahrscheinlichkeiten wie folgt bestimmen⁴:

⁴Der Erwartungswert ist ganz allgemein definiert über $E = \sum_i \lambda_i p_i$, mit den Eigenwerten λ_i und den Wahrscheinlichkeiten p_i .

$$\begin{aligned}
E_{QM}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) &= P_{1,1,1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) + P_{1,-1,-1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) \\
&\quad + P_{-1,1,-1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) + P_{-1,-1,1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) - P_{-1,1,1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) \\
&\quad - P_{1,-1,1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) - P_{1,1,-1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) - P_{-1,-1,-1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) \\
&= \sin(\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Nun kennen wir den quantenmechanischen Erwartungswert, den wir für bestimmte Einstellungen unserer Phasen erhalten. Jetzt ist nur noch zu klären, wie sich die Erwartungswerte in einer NCHV-Theorie berechnen.

Nichtkontextualität bedeutet, dass die Messergebnisse der Photonen bereits im Voraus feststehen und unabhängig davon sind, welche kommutierenden Observablen zusätzlich zu diesen mitgemessen werden. Wir wollen diese Messergebnisse hier durch die kleinen Buchstaben $a(\Phi_A)_i$, $b(\Phi_B)_i$ und $c(\Phi_C)_i$ beschreiben. Sie können wie oben ebenfalls nur die Werte ± 1 annehmen.

Mit den Bedingungen der Nichtkontextualität ergibt sich der Erwartungswert zu[9]

$$E_{NCHV}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a(\Phi_A)_i b(\Phi_B)_i c(\Phi_C)_i, \tag{2.15}$$

wobei N die Anzahl der gemessenen Ereignisse ist. Da die Erwartungswerte

$$E_{QM}\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) = E_{QM}\left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right) = E_{QM}\left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right) = 1 \tag{2.16}$$

ergeben, muss gleiches auch für die Erwartungswerte der NCHV-Theorien gelten, da die Ergebnisse der Quantenmechanik reproduziert werden sollen. Folglich muss auch hier gelten, dass

$$a\left(\frac{\pi}{2}\right)_i b(0)_i c(0)_i = a(0)_i b\left(\frac{\pi}{2}\right)_i c(0)_i = a(0)_i b(0)_i c\left(\frac{\pi}{2}\right)_i = 1 \tag{2.17}$$

ist. Aufgrund der Annahme der Nichtkontextualität folgt durch Multiplikation der Gleichungen (2.17)

$$a(0)_i^2 b(0)_i^2 c(0)_i^2 a\left(\frac{\pi}{2}\right)_i b\left(\frac{\pi}{2}\right)_i c\left(\frac{\pi}{2}\right)_i = a\left(\frac{\pi}{2}\right)_i b\left(\frac{\pi}{2}\right)_i c\left(\frac{\pi}{2}\right)_i = 1 \tag{2.18}$$

und somit $E_{NCHV}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Dies ist aber genau das Gegenteil des zu erwartenden quantenmechanischen Erwartungswertes $E_{QM}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -1$. Man sollte also mit diesem Experiment einen Widerspruch zwischen NCHV-Theorien und der Quantenmechanik erzeugen können.

Im folgenden muss nur noch geklärt werden, wie die Wahrscheinlichkeiten $P_{A,B,C}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C)$ gemessen werden können. Dazu werden nur Koinzidenzen K , also die gleichzeitige Detektion der beiden Photonen innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls, zwischen den beiden Detektoren gemessen. Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich dann durch

$$P_{1,1,1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) = \frac{K(1, 1, 1|\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C)}{K(1, 1, 1|\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) + \dots + K(-1, -1, -1|\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C)}, \tag{2.19}$$

wobei im Nenner alle acht Terme aus Gleichung (2.14) aufsummiert werden.

2.5 Belltest und CHSH

Mit diesem Aufbau ist es ebenfalls möglich, einen Belltest durchzuführen. Dazu benutzen wir allerdings nicht Gleichung (2.6), sondern eine andere Ungleichung, die unter dem Namen CHSH-Ungleichung (benannt nach Clauser, Horne, Shimony und Holt) bekannt ist. Diese berücksichtigt unter anderem, dass die Detektoren nicht perfekt sind, also nicht alle ankommenden Teilchen detektieren[10]. Diesen ausgelassenen Messungen wird der Wert 0 zugeschrieben. Es ergeben sich jetzt gemittelte Messergebnisse $\bar{A}(\Phi_A), \bar{B}(\Phi_B) \leq 1$ mit denen sich folgende Ungleichung aufstellen lässt

$$-2 \leq S = E_{NCHV}(\Phi_A, \Phi_B) - E_{NCHV}(\Phi_A, \Phi'_B) + E_{NCHV}(\Phi'_A, \Phi'_B) + E_{NCHV}(\Phi'_A, \Phi_B) \leq 2. \quad (2.20)$$

Mit dem experimentellen Aufbau lässt sich auch ein solcher Test realisieren.

Da hierfür nur zwei verschränkte Qubits benötigt werden, dient das zweite Photon dazu, die Polarisation des ersten Photons, welches durch das Interferometer propagiert, festzulegen. Dazu werden das $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen und der Polarisator so eingestellt, dass die Polarisation des zweiten Photons auf $|D\rangle$ gedreht wird. Da die beiden Photonen vor der Messung des zweiten Photons miteinander verschränkt waren, befindet sich Photon 1 nun ebenfalls im Zustand $|D\rangle$. Nach dem PBS im Interferometer lässt sich der Zustand des ersten Photons durch

$$\Psi' = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1 |a\rangle_1 + |V\rangle_1 |b\rangle_1) \quad (2.21)$$

beschreiben. Die Detektionswahrscheinlichkeit berechnet sich äquivalent wie in 2.4.2 zu

$$\begin{aligned} P_{A,B}(\Phi_A, \Phi_B) &= |(\langle A, \Phi_A | \langle B, \Phi_B |) |\Psi'\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4}(1 - AB \sin(\Phi_A + \Phi_B)) \end{aligned} \quad (2.22)$$

und damit ergibt sich der Erwartungswert zu

$$E_{QM}(\Phi_A, \Phi_B) = \sin(\Phi_A + \Phi_B). \quad (2.23)$$

Setzt man diese Werte in die Bell-CHSH Ungleichung

$$-2 \leq S \leq 2$$

ein, erkennt man, dass man für die Winkel $\Phi_A = 0,75\pi$, $\Phi'_A = -0,75\pi$, $\Phi_B = \frac{\pi}{2}$ und $\Phi'_B = 0$ eine maximale Verletzung der Ungleichung erhält, nämlich $|S| = 2\sqrt{2} > 2$.

2.6 Zustandstomographie

Die Idee der Zustandstomographie ist es, mehrere Messungen an identisch präparierten Zweiniveausystemen durchzuführen, um durch diese auf den Zustand des Systems rückschließen zu können. Da das Thema sehr ausführlich in [11] behandelt wird,

soll hier nur eine kurze Zusammenfassung der zentralen Ergebnisse aufgeführt werden. Bereits im Jahre 1852 konnte Georg Stokes zeigen, dass man mit vier Parametern die Polarisation eines Lichtstrahls bestimmen kann [11]. Diese vier Parameter können durch Messungen der vier Operatoren

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_0 &= |H\rangle\langle H| \\ \hat{\mu}_1 &= |V\rangle\langle V| \\ \hat{\mu}_2 &= |D\rangle\langle D| \\ \hat{\mu}_3 &= |R\rangle\langle R|,\end{aligned}$$

wobei $|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i|V\rangle)$ rechtszirkular polarisierte Photonen beschreibt, bestimmt werden. Für die Bestimmung des Zustands zweier Photonen, der in diesem Experiment gemessen wurde, benötigt man 16 Parameter. Diese lassen sich, ähnlich wie für ein Photon, durch die Messung verschiedener Operatoren $\hat{\mu}_i \otimes \hat{\mu}_j$ an dem Zweiphotonenzustand bestimmen. Diese sechzehn verschiedenen Operatoren und die Zustände auf die der unbekannte Zustand $\hat{\rho}$ projiziert wird, sind in folgender Tabelle aufgelistet.

ν	$\hat{\mu}_i \otimes \hat{\mu}_j$	Ψ_ν
1	$ H\rangle\langle H \otimes H\rangle\langle H $	$ H_1\rangle H_2\rangle$
2	$ H\rangle\langle H \otimes V\rangle\langle V $	$ H_1\rangle V_2\rangle$
3	$ V\rangle\langle V \otimes V\rangle\langle V $	$ V_1\rangle V_2\rangle$
4	$ V\rangle\langle V \otimes H\rangle\langle H $	$ V_1\rangle H_2\rangle$
5	$ R\rangle\langle R \otimes H\rangle\langle H $	$ R_1\rangle H_2\rangle$
6	$ R\rangle\langle R \otimes V\rangle\langle V $	$ R_1\rangle V_2\rangle$
7	$ D\rangle\langle D \otimes V\rangle\langle V $	$ D_1\rangle V_2\rangle$
8	$ D\rangle\langle D \otimes H\rangle\langle H $	$ D_1\rangle H_2\rangle$
9	$ D\rangle\langle D \otimes R\rangle\langle R $	$ D_1\rangle R_2\rangle$
10	$ D\rangle\langle D \otimes D\rangle\langle D $	$ D_1\rangle D_2\rangle$
11	$ R\rangle\langle R \otimes D\rangle\langle D $	$ R_1\rangle D_2\rangle$
12	$ H\rangle\langle H \otimes D\rangle\langle D $	$ H_1\rangle D_2\rangle$
13	$ V\rangle\langle V \otimes D\rangle\langle D $	$ V_1\rangle D_2\rangle$
14	$ V\rangle\langle V \otimes L\rangle\langle L $	$ V_1\rangle L_2\rangle$
15	$ H\rangle\langle H \otimes L\rangle\langle L $	$ H_1\rangle L_2\rangle$
16	$ R\rangle\langle R \otimes L\rangle\langle L $	$ R_1\rangle L_2\rangle$

Hierbei gibt der Zustand $|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i|V\rangle)$ linkszirkular polarisierte Photonen an.

Die Zählrate n_ν für eine bestimmte Messung ist durch

$$n_\nu = N \langle \Psi_\nu | \hat{\rho} | \Psi_\nu \rangle \quad (2.24)$$

gegeben, wobei N eine Konstante ist, die vom Photonenfluss und den Detektoreffizienzen abhängt. Um aus diesen Messungen den Zustand rekonstruieren zu können,

benötigt man noch 16 verschiedene Matrizen \hat{M}_ν , mit denen man die obigen Zählraten gewichten muss. Diese Matrizen besitzen die Eigenschaft jede beliebige 4x4-Matrix rekonstruieren zu können.

Des Weiteren haben sie die Eigenschaft, dass

$$\text{Tr}\{\hat{M}_\nu\} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \nu = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{wenn } \nu = 5, \dots, 16 \end{cases} . \quad (2.25)$$

Es lässt sich damit zeigen, dass der Parameter N durch

$$N = \sum_{\nu=1}^4 n_\nu \quad (2.26)$$

gegeben ist. Die Formel, um den Zustand $\hat{\rho}$ zu rekonstruieren, ergibt sich schließlich zu

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{\nu=1}^{16} \hat{M}_\nu n_\nu}{\sum_{\nu=1}^4 n_\nu} . \quad (2.27)$$

3 Das Experiment

3.1 Aufbau der Quelle

Der Aufbau der Quelle ist in Abbildung 3.1 schematisch dargestellt.

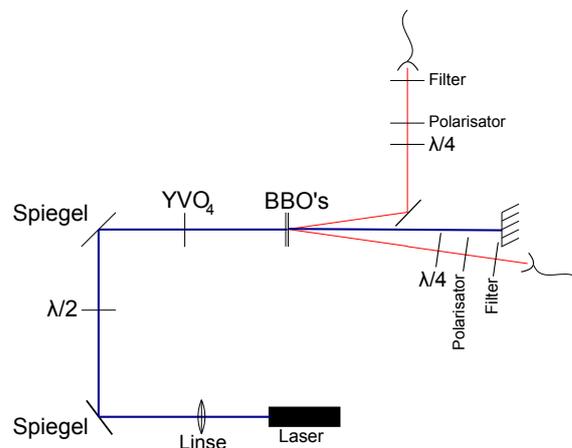


Abbildung 3.1: Aufbau der Photonenquelle, mit der die verschränkten Photonen erzeugt wurden. Der obere Arm kann wahlweise direkt an einen Einzelphotonendetektor oder mithilfe einer Singlemodefaser an das Interferometer angeschlossen werden.

Als Pumplaser dient ein blauer Halbleiterlaser mit einer zentralen Wellenlänge von ca. $\lambda_{Pump} = 402nm$. Der Laserstrahl wird mithilfe einer asphärischen Linse kollimiert und durchläuft anschließend eine Linse, die den Strahl auf die zwei doppelbrechenden BBO-Kristalle fokussiert. Das $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen dient dazu, die Polarisation des Strahls auf $|D\rangle$ zu drehen, damit beide Kristalle mit gleicher Wahrscheinlichkeit gepumpt werden. Der anschließende Yttrium-Vanadat (YVO_4)-Kristall der Dicke $d_{YVO_4} = 200\mu m$ dient dazu, den oben beschriebenen Phasenschub zwischen den beiden Polarisationen $|H\rangle$ und $|V\rangle$ zu kompensieren. Damit dieser nur die Phase zwischen $|H\rangle$ und $|V\rangle$ verschiebt, muss seine optische Achse parallel zu $|D\rangle$ ausgerichtet werden. Die beiden Filter vor der Einkopplung hatten eine maximale Transmission bei $\lambda = 805nm$ mit einer Bandbreite von $\Delta\lambda_{Filter} = 7nm$. Diese Filter filterten leider auch den Großteil der Koinzidenzen heraus, da die Quelle Photonen mit einer Bandbreite von $\Delta\lambda_{Quelle} \approx (40 - 50)nm$ erzeugt. Die Anzahl der gemessenen Koinzidenzen, wenn ein Photon mit dem Interferometer analysiert wurde, lag somit bei lediglich 15 Koinzidenzen pro Sekunde.

3.2 Zustandstomographie der Quelle

Um sicher zu gehen, dass die Quelle den gewünschten Zustand $|\Psi_{theo}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_2\rangle|H_1\rangle + |V_2\rangle|V_1\rangle)$ emittiert, wurde eine Zustandstomographie dieses Zustands durchgeführt. Für diese Messung wurden beide Ausgänge der Quelle direkt an zwei Einzelphotonendetektoren angeschlossen, da das Interferometer hier nicht von Nöten war. In Kapitel 2.6 sind die Messbasen für die 16 verschiedenen Messungen angegeben, mit denen der Zustand tomographisch bestimmt werden kann. Diese wurden der Reihe nach mithilfe der beiden $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen und der Polarisatoren in der Quelle eingestellt. Die folgende Tabelle gibt die Koinzidenzen an, die in der jeweiligen Basis gemessen wurden.

ν	oberer Ausgang	unterer Ausgang	Koinzidenzen
1	$ H\rangle$	$ H\rangle$	1062
2	$ H\rangle$	$ V\rangle$	53
3	$ V\rangle$	$ V\rangle$	1480
4	$ V\rangle$	$ H\rangle$	153
5	$ R\rangle$	$ H\rangle$	773
6	$ R\rangle$	$ V\rangle$	635
7	$ D\rangle$	$ V\rangle$	673
8	$ D\rangle$	$ H\rangle$	766
9	$ D\rangle$	$ R\rangle$	741
10	$ D\rangle$	$ D\rangle$	1493
11	$ R\rangle$	$ D\rangle$	755
12	$ H\rangle$	$ D\rangle$	464
13	$ V\rangle$	$ D\rangle$	1096
14	$ V\rangle$	$ L\rangle$	1116
15	$ H\rangle$	$ L\rangle$	446
16	$ R\rangle$	$ L\rangle$	1467

Die mit diesen Werten erhaltene Dichtematrix lautet

$$\hat{\rho}_{exp} \approx \begin{pmatrix} 0,386 & -0,034 & 0,058 & 0,491 \\ -0,034 & 0,019 & 0,004 & -0,034 \\ 0,058 & 0,004 & 0,056 & 0,102 \\ 0,491 & -0,034 & 0,102 & 0,539 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0,041 & 0,060 & 0,027 \\ -0,041 & 0 & -0,057 & -0,048 \\ -0,060 & 0,057 & 0 & -0,109 \\ -0,027 & 0,048 & 0,109 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

und ist in Bild (3.2) graphisch dargestellt.

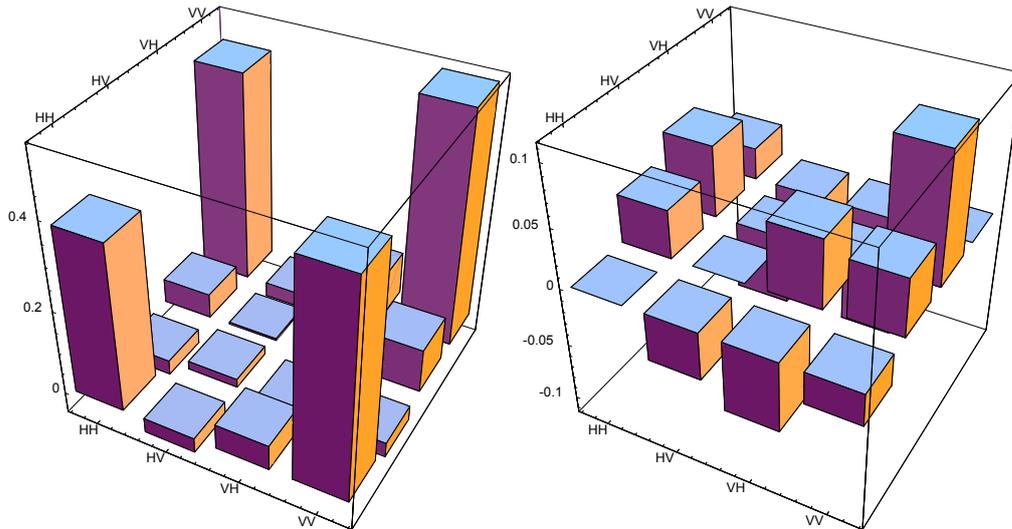


Abbildung 3.2: Graphische Darstellung der bestimmten Dichtematrix. Links ist der Realteil und rechts der Imaginärteil abgebildet.

Man erkennt eindeutig, dass die Balken $(|H\rangle|H\rangle)(\langle H|\langle H|)$ und $(|V\rangle|V\rangle)(\langle V|\langle V|)$ im Realteil der Matrix nicht gleich hoch sind. Dies kann an einer fehlerhaften Einkopplung liegen, da die Zählraten der Photonen in der $|H\rangle$ und $|V\rangle$ Basis stark vom Versatz durch Polarisator und $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen abhängig sind. Damit die beiden Balken die gleiche Höhe besitzen, muss die gleiche Anzahl an $|H\rangle$ und $|V\rangle$ Photonen aufgesammelt werden.

Um zu überprüfen wie genau dieser Zustand mit dem theoretisch zu erwarteten Zustand übereinstimmt, wird deren Überlappung bestimmt. Diese wird auch als Fidelity F bezeichnet und ist hier wie folgt definiert

$$F = \text{Tr}[\hat{\rho}_{exp} \cdot \hat{\rho}_{theo}], \quad (3.2)$$

wobei die theoretische Dichtematrix des Zustands durch

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{th} &= |\Psi_{theo}\rangle \langle \Psi_{theo}| \\ &= \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

gegeben ist. Mit diesen Werten erhalten wir eine Fidelity von $F = 0,95$. Dieser Wert ist groß genug, um damit die folgenden Experimente erfolgreich durchführen zu können.

3.3 Aufbau des Interferometers

Der Aufbau des Interferometers ist im folgenden Bild schematisch dargestellt.

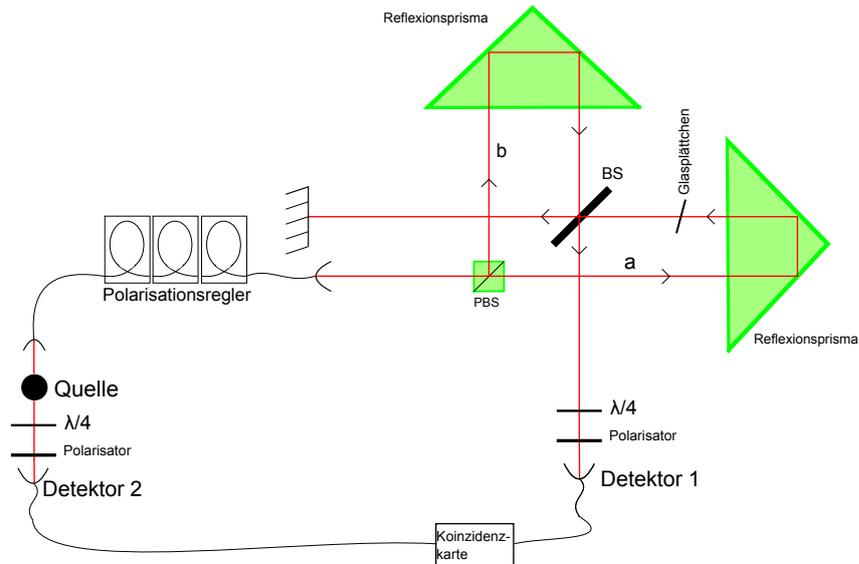


Abbildung 3.3: Die Photonen aus dem oberen Ausgang der Quelle treffen nach den Polarisationsreglern auf den PBS des Michelson-Interferometers, der so orientiert ist, dass er horizontal polarisierte Photonen transmittiert und vertikal polarisierte Photonen reflektiert. Auf dem BS überlagern sich die beiden Strahlen aus den räumlichen Moden a und b. Die in den Detektoren 1 und 2 gemessenen Ereignisse werden durch eine Koinzidenzkarte analysiert, welche nur jene Ereignisse akzeptiert, die innerhalb eines festgelegten Zeitintervalls geschehen.

Die Photonen aus dem oberen Ausgang der Quelle werden mithilfe einer Singlemodefaser in das Interferometer eingekoppelt. Dort treffen sie senkrecht auf die Fläche des PBS, der so beschichtet ist, dass er horizontal polarisierte Photonen transmittiert und vertikal polarisierte Photonen reflektiert. Die beiden Arme des Interferometers werden, wie oben dargestellt, mit a und b bezeichnet. Beide Strahlen treffen nach dem PBS auf Rückreflexionsprismen und überlagern sich anschließend auf einem 50 : 50 BS. Es sei noch darauf hingewiesen, dass das Rückreflexionsprisma in Arm a, mithilfe eines Piezokristalls in longitudinaler Richtung, verfahren werden kann. Der BS ist so orientiert, dass die einfallenden Strahlen senkrecht zu seiner Oberfläche stehen. Der Strahl in Arm a durchläuft zusätzlich ein dünnes Glasplättchen der Dicke $d = 1\text{mm}$. Durch Verkippen dieses Glasplättchens kann die optische Weglänge in Arm a variiert werden. Von den beiden Strahlen, die den BS verlassen, wird nur einer betrachtet, da für das Experiment nur zwei Einzelphotonendetektoren zur Verfügung standen. Um die Polarisation des Lichtstrahls zu bestimmen, stehen ein $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen und ein Polarisator zur Verfügung. Anschließend werden die Photonen in eine Singlemodefaser eingekoppelt, die an einen Einzelphotonendetektor angeschlossen wird. Für eine detailliertere Ausführung des Aufbaus und der Abschnitte 3.4.1 und 3.4.2 sei auf die identischen Abschnitte in [1] verwiesen.

3.4 Justage des Interferometers

3.4.1 Justage der Strahlüberlappung

Um den Strahlüberlapp justieren zu können, wurde ein Laser der Wellenlänge $\lambda = 806\text{nm}$ an das Interferometer gekoppelt, da mit den einzelnen Photonen aus der Quelle eine zu geringe Intensität zur Verfügung stand. Des Weiteren wurde eine Kamera direkt vor der Einkopplung in die Singlemodefaser in den Strahlengang gestellt. Damit können die beiden Teilstrahlen aus den beiden Armen betrachtet werden. Variiert man nun die Armlänge des Arms a periodisch mithilfe des Piezokristalls, kann man ein zeitlich variierendes Interferenzmuster der beiden Strahlen mit der Kamera beobachten. Die Strahlen überlappen sich dann perfekt, wenn sich als Interferenzbild ein konzentrischer Kreis ergibt, der periodisch aufleuchtet. Erkennt man Interferenzstreifen, die von oben nach unten laufen, ist die Höhe der beiden Strahlen nicht aufeinander abgeglichen. Dies kann man durch Verkippen der beiden Prismen nach vorne oder hinten kompensieren. Sollten die Interferenzstreifen von links nach rechts oder umgekehrt verlaufen, stimmt die Strahlüberlappung in dieser Richtung nicht überein. Dies lässt sich durch verschieben des Prismas in Arm b entweder nach links oder rechts kompensieren.

3.4.2 Abgleich der Armlängen

Um die beiden Armlängen aufeinander abzugleichen, wurde wieder die Quelle an das Interferometer angeschlossen. Des Weiteren wurde die Länge des Arms a wieder mit einem Piezokristall variiert. Das dadurch entstandene Interferenzsignal wurde mit dem Einzelphotonendetektor aufgenommen. Verschiebt man das Prisma in Arm a mithilfe einer Mikrometerschraube, kann man eine Variation der Visibility

$$V = \frac{\text{Zählrate}(\text{Maximum}) - \text{Zählrate}(\text{Minimum})}{\text{Zählrate}(\text{Maximum}) + \text{Zählrate}(\text{Minimum})} \quad (3.4)$$

erkennen. Die Armlängen sind dann aufeinander abgeglichen, wenn die Visibility ihr Maximum erreicht. In diesem Fall treffen die Photonen aus Mode a und b innerhalb eines Zeitintervalls, das kleiner als die Kohärenzzeit t_c des Lasers ist, auf dem BS auf. Je kleiner die Kohärenzzeit des Lasers ist, desto genauer lassen sich also die beiden Armlängen des Interferometers justieren.

3.4.3 Justage der Polarisierung

Wie oben schon erwähnt, emittiert die Quelle Photonen im Zustand $|\Psi_{Quelle}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle)$. Diese Photonen werden in eine Singlemodefaser eingekoppelt. Diese ist allerdings nicht polarisationserhaltend und muss deshalb so eingestellt werden, dass nach der Glasfaser immer noch der Zustand $|\Psi_{Quelle}\rangle$ ausgekoppelt wird. Dazu durchläuft die Glasfaser eine Anordnung die aus drei Kammern besteht, in denen die Glasfaser im Kreis gewickelt ist. Verkippt man diese drei Elemente gegeneinander,

kann die Polarisation der Photonen, aufgrund der Doppelbrechung des Glasfasermaterials, gedreht werden. Die Justage der Polarisation besteht im Wesentlichen aus zwei Schritten, die solange wiederholt werden, bis die Glasfaser den gewünschten Zustand auskoppelt.

1. Die Polarisation wird in der Quelle mithilfe des Polarisators und des $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchens auf $|H\rangle$ und im Interferometer auf $|V\rangle$ eingestellt. Mithilfe der ersten beiden Kammern wird die Polarisation so gedreht, dass der Detektor nach dem Interferometer keine Photonen mehr misst. Jetzt kann davon ausgegangen werden, dass die Faser die Polarisationen $|H\rangle$ und $|V\rangle$ erhält, jedoch bleibt unbekannt, ob die Faser einen Phasenschub zwischen $|H\rangle$ und $|V\rangle$ erzeugt.
2. Um den Phasenschub zu kompensieren, wird die Polarisation der Quelle auf $|D\rangle$ gestellt und im Interferometer auf $|\bar{D}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle)$ eingestellt. Mithilfe der letzten beiden Kammern wird nun wieder die Faser so gedreht, dass der Detektor keine Photonen mehr misst. Da man jetzt allerdings nicht mehr davon ausgehen kann, dass die Faser für $|H\rangle$ und $|V\rangle$ noch polarisationserhaltend ist, muss man zu Schritt 1 zurückkehren.

Die hier beschriebene Methode ist nicht sehr elegant gewählt, da der Justageprozess mitunter sehr lange dauern kann. Diese wurde allerdings gewählt, da die übliche Methode, bei der man die Phase zwischen $|H\rangle$ und $|V\rangle$ durch Verkippen eines doppelbrechenden Kristalls kompensiert, nicht funktionierte.

3.5 Zustandstomographie des im Interferometer präparierten Zustands

Um die Funktionstüchtigkeit des Interferometers zu testen wurde als erstes eine Zustandstomographie mithilfe eines bekannten Zustands durchgeführt. Als Photonenquelle diente die Quelle, die auch später für die Widerlegung der NCHV-Theorien benutzt wurde. Allerdings wurden hier keine Koinzidenzen beobachtet, sondern nur die Einzelzählraten der aufgesammelten Photonen aus dem oberen Arm der Quelle. Um den bekannten Zustand zu erhalten, wurde zusätzlich ein Polarisator am Eingang des Interferometers platziert, der die Eingangspolarisation auf $|D\rangle$ dreht. Durch den PBS wird der Strahl in die beiden räumlichen Moden a und b aufgeteilt. Die Transformation des Zustands durch den PBS kann so beschrieben werden, dass der transmittierte Strahl unverändert bleibt und der reflektierte Strahl einen Phasenschub von $\Phi = \frac{\pi}{2}$ erfährt [1]. Der Zustand nach dem PBS lässt sich folglich durch

$$\Psi_{test} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle |a\rangle + i |V\rangle |b\rangle) \quad (3.5)$$

ν	Mode 1	Mode 2	Mode 1 im Experiment	Mode 2 im Experiment
1	$ H\rangle$	$ H\rangle$	$ H\rangle$	$ a\rangle$
2	$ H\rangle$	$ V\rangle$	$ H\rangle$	$ b\rangle$
3	$ V\rangle$	$ V\rangle$	$ V\rangle$	$ b\rangle$
4	$ V\rangle$	$ H\rangle$	$ V\rangle$	$ a\rangle$
5	$ R\rangle$	$ H\rangle$	$ R\rangle$	$ a\rangle$
6	$ R\rangle$	$ V\rangle$	$ R\rangle$	$ b\rangle$
7	$ D\rangle$	$ V\rangle$	$ D\rangle$	$ b\rangle$
8	$ D\rangle$	$ H\rangle$	$ D\rangle$	$ a\rangle$
9	$ D\rangle$	$ R\rangle$	$ D\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\rangle - i b\rangle)$
10	$ D\rangle$	$ D\rangle$	$ D\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\rangle + b\rangle)$
11	$ R\rangle$	$ D\rangle$	$ R\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\rangle + b\rangle)$
12	$ H\rangle$	$ D\rangle$	$ H\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\rangle + b\rangle)$
13	$ V\rangle$	$ D\rangle$	$ V\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\rangle + b\rangle)$
14	$ V\rangle$	$ L\rangle$	$ V\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\rangle + i b\rangle)$
15	$ H\rangle$	$ L\rangle$	$ H\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\rangle + i b\rangle)$
16	$ R\rangle$	$ L\rangle$	$ R\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\rangle + i b\rangle)$

Tabelle 3.1: In den Spalten zwei und drei sind die Messbasen, wie sie in [11] definiert wurden aufgetragen. Die letzten beiden Spalten geben die Messbasen an, die in diesem Experiment benutzt wurden.

beschreiben ¹. Die mit diesem Zustand zu erwartende Dichtematrix lautet

$$\hat{\rho}_{theo2} = |\Psi_{test}\rangle \langle \Psi_{test}| = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Tabelle 3.1 zeigt in den Spalten zwei und drei die Reihenfolge wie sie in [11] definiert worden ist. Im vorliegenden Fall kann die Analyse nicht durch zwei Polarisatoren, wie bei der Tomographie der Quelle, durchgeführt werden, da als zweite Mode die räumliche Mode des Photons benutzt wird. Die räumlichen Moden, mit denen das Photon gemessen werden muss, können aus den Polarisationsmoden erhalten werden, indem man $|H\rangle$ durch $|a\rangle$ und $|V\rangle$ durch $|b\rangle$ ersetzt. Der allgemeine Zustand der räumlichen Mode lässt sich hier wie folgt angeben

$$|\Psi_{räuml.}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle + e^{i\Phi} |b\rangle), \quad (3.7)$$

¹Es mag aufgefallen sein, dass in dem oben erwähnten GHZ Zustand sowie in Gleichung (2.21) der Phasenschub von i nicht auftritt. Dieser wurde dort weggelassen, da somit die folgende theoretische Beschreibung vereinfacht wurde. Dies ist im obigen Fall erlaubt, da durch eine Drehung des Glasplättchens dieser Phasenschub kompensiert werden kann und somit keine Rolle mehr spielt.

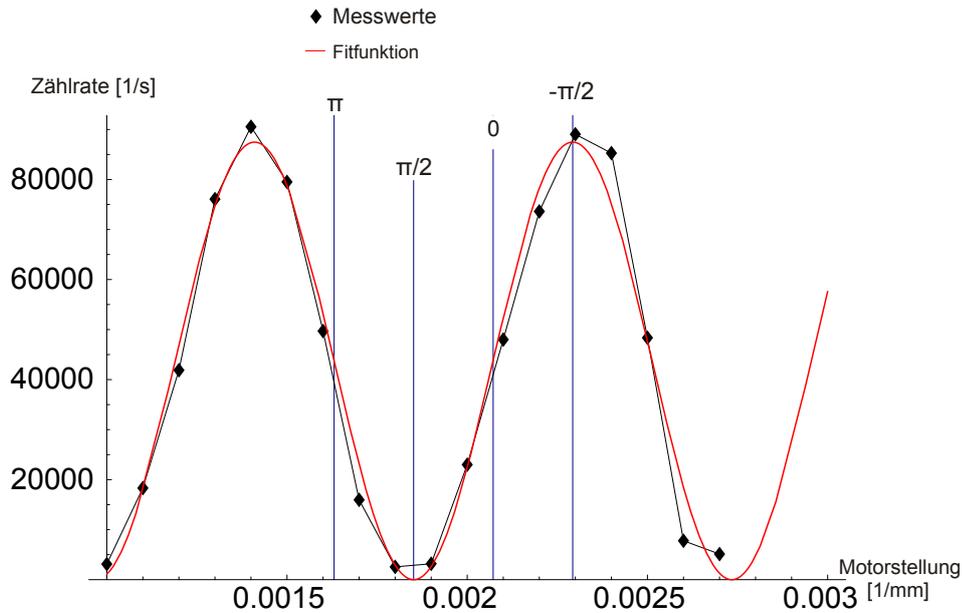


Abbildung 3.4: Bild einer typischen Kalibrationskurve. Die Werte π , $\frac{\pi}{2}$, 0 und $-\frac{\pi}{2}$ an den senkrechten blauen Strichen geben an, mit welchem Phasenschub Φ die jeweilige Motorposition assoziiert werden kann.

wobei die Phase Φ , wie schon oben erwähnt, durch Drehung des Glasplättchens verändert werden kann.

Vor jeder Teilmessung wurden die Winkelstellungen des Glasplättchens neu kalibriert, da das Interferometer über längere Zeitskalen nicht phasenstabil ist. In [1] wurde gezeigt, dass innerhalb von zehn Minuten mit einem durchschnittlichen Phasenschub von etwa 2,7% einer vollen Periode gerechnet werden muss. Über die Dauer der gesamten Messung (ca. 30 Minuten), würde die Phase ohne neues Kalibrieren um $\Delta\Phi = 30^\circ$ wandern.

Zur Kalibration des Phasenschubs wurden die Photonen in $|D\rangle$ analysiert und gleichzeitig das Glasplättchen mithilfe eines Schrittmotors gedreht. Bild 3.4 zeigt solch eine Kalibrationskurve. Die vier senkrechten Linien geben die jeweiligen relativen Phasen im Interferometer, die durch das Glasplättchen eingestellt wurden, an.

Für die ersten acht Messungen, in denen jeweils nur die Moden a und b betrachtet werden sollen, wird der jeweils andere Arm des Interferometers blockiert. Die jeweiligen Zählraten zu den 16 verschiedenen Projektionen, integriert über eine Sekunde, sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

ν	Mode 1	Mode 2	Zählrate [1/s]
1	$ H\rangle$	$ a\rangle$	2525
2	$ H\rangle$	$ b\rangle$	0
3	$ V\rangle$	$ b\rangle$	2546
4	$ V\rangle$	$ a\rangle$	0
5	$ R\rangle$	$ a\rangle$	989
6	$ R\rangle$	$ b\rangle$	1473
7	$ D\rangle$	$ b\rangle$	1267
8	$ D\rangle$	$ a\rangle$	1231
9	$ D\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\rangle - i b\rangle)$	4853
10	$ D\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\rangle + b\rangle)$	2966
11	$ R\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\rangle + b\rangle)$	4749
12	$ H\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\rangle + b\rangle)$	2463
13	$ V\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\rangle + b\rangle)$	2656
14	$ V\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\rangle + i b\rangle)$	2648
15	$ H\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\rangle + i b\rangle)$	2523
16	$ R\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\rangle + i b\rangle)$	3630

Es muss allerdings noch beachtet werden, dass die Zählraten ab $\nu = 9$ durch zwei geteilt werden müssen. Dies liegt daran, dass im Gegensatz zu einem Polarisator, der hier bei den Analysepolarisationen $|D\rangle, |R\rangle$ und $|L\rangle$ die Hälfte der ursprünglichen Intensität rausfiltert, dies bei der Analyse durch die räumlichen Moden des Interferometers jedoch nicht geschieht. Hier können die Photonen aus beiden Armen ohne Intensitätsverlust detektiert werden. Da die Analyse der Zählraten durch die Matrizen \hat{M}_ν , wie sie in [11] definiert wurden, davon ausgeht, dass mit zwei Polarisatoren gemessen wird, müssen hier die Zählraten ab $\nu = 9$ durch zwei geteilt werden.

Die mit diesen Werten erhaltene Dichtematrix lautet

$$\hat{\rho} \approx \begin{pmatrix} 0,498 & -0,006 & -0,006 & 0,154 \\ -0,006 & 0 & -0,066 & -0,001 \\ -0,006 & -0,066 & 0 & 0,011 \\ 0,154 & -0,001 & 0,011 & 0,502 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0,054 & 0,46 \\ 0 & 0 & -0,012 & 0,039 \\ 0,054 & 0,014 & 0 & -0,01 \\ -0,46 & -0,039 & 0,01 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

und ist im folgenden Bild graphisch dargestellt.

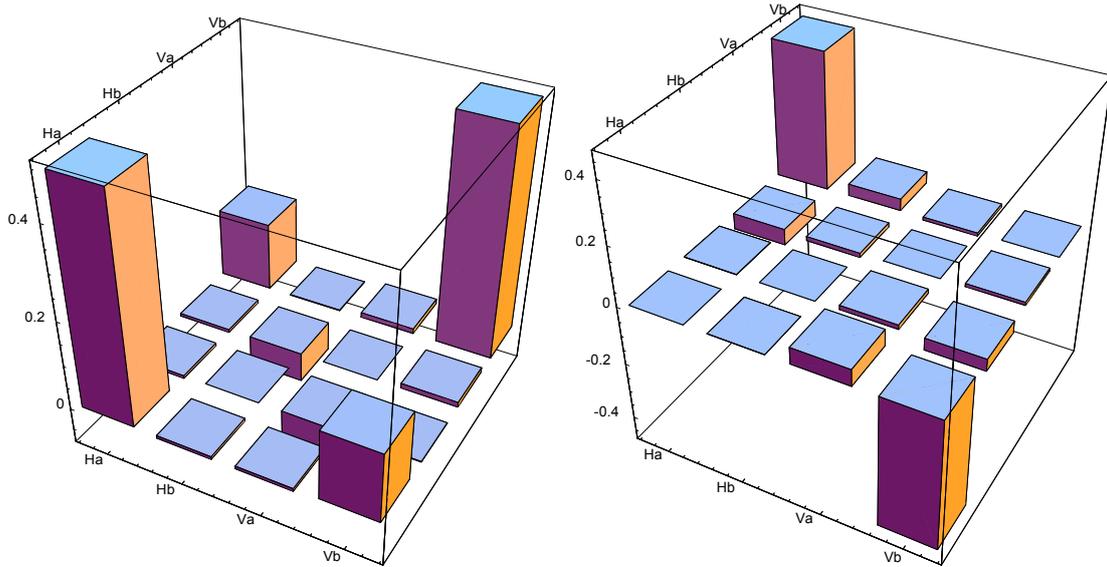


Abbildung 3.5: Graphische Darstellung der erhaltenen Dichtematrix. Links ist der Realteil der Matrix abgebildet und rechts der Imaginärteil.

Was im Realteil auffällt, sind die Balken auf der Nebendiagonalen, die nach der theoretischen Erwartung ebenfalls 0 sein sollten. Dieses Verhalten ist auf den Wert $\nu = 16$ zurückzuführen, der eine zu hohe Zählrate aufweist. Dies kann daran liegen, dass sich die Phase während dem Experiment verschoben hat und so zu den erhöhten Zählraten geführt hat. Eine weitere Erklärung könnte eine ungenaue Einkopplung in die Glasfaser zum Detektor hin sein. Dies lässt sich dadurch motivieren, dass die Zählraten $\nu = 5$ und $\nu = 6$ sehr stark voneinander abweichen, obwohl gleiche Zählraten erwartet werden. Da die so entstandenen Balken symmetrisch auf der Nebendiagonalen liegen, spielen sie bei der Berechnung der Reinheit und der Fidelity keine Rolle. Für diese Messung ergibt sich ein Reinheitsgrad R^2 von

$$R = \text{Tr}[\hat{\rho} \cdot \hat{\rho}] = 0,99. \quad (3.9)$$

Der Zustand entspricht also fast einem reinen Zustand. Die Fidelity F ergibt hier einen Wert von $F = 0,96$, was ebenfalls ein relativ guter Wert ist, da man für eine perfekte Übereinstimmung zwischen theoretischer und gemessener Matrix den Wert $F = 1$ erhält. Auf eine Fehlerberechnung soll hier verzichtet werden, da diese den Rahmen dieser Arbeit übersteigt.

3.6 Messungen zur Widerlegung NCHV-Theorien

Bei den folgenden Messungen wurde der Aufbau wie in Bild 2.2 verwendet. Insbesondere sei darauf hingewiesen, dass für diese Experimente jetzt die Koinzidenzen zwischen

²Zur Erinnerung: für einen reinen Zustand muss gelten, dass $\text{Tr}[\hat{\rho} \cdot \hat{\rho}] = \text{Tr}[\hat{\rho}] = 1$ ist.

den beiden verschränkten Photonen betrachtet werden. Des Weiteren wurden das $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen und der Polarisator aus dem oberen Arm der Quelle entfernt, da die Analyse dieser Photonen nach dem Interferometer durchgeführt wird.

3.6.1 Widerlegung von NCHV-Theorien mithilfe eines GHZ-Zustands

Wie in Kapitel 2 beschrieben, lässt sich der Zustand des Gesamtsystems nach dem PBS durch $\Psi_{GHZ} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_2\rangle |H_1\rangle |a_1\rangle + |V_2\rangle |V_1\rangle |b_1\rangle) |l_2\rangle$ beschreiben. Es sei noch einmal erwähnt, dass die Koinzidenzwahrscheinlichkeit dieser Photonenpaare durch

$$P_{A,B,C}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) = \frac{1}{8} [1 + ABC \sin(\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C)]$$

gegeben ist. Da für dieses Experiment nur zwei Detektoren zur Verfügung standen, wurde nur der Ausgang $A = +1$ am Interferometer betrachtet. Die Messung an nur einem Detektor ist ausreichend, um $P_{A,B,C}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C)$ zu messen, da die Wahrscheinlichkeit für feste Winkel Φ_A, Φ_B, Φ_C das Ereignis $A = +1, B = +1, C = +1$ zu detektieren die gleiche ist, wie für $A = -1, B = -1, C = +1$. Folglich ergibt sich der gemessene Erwartungswert aus Gleichung (2.14) zu

$$\begin{aligned} E_{QM}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) &= P_{1,1,1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) + P_{1,-1,-1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) + P_{-1,1,-1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) \\ &\quad + P_{-1,-1,1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) - P_{-1,1,1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) - P_{1,-1,1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) \\ &\quad - P_{1,1,-1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) - P_{-1,-1,-1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) \\ &= 2 \cdot P_{1,1,1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) + 2 \cdot P_{1,-1,-1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) \\ &\quad - 2 \cdot P_{1,-1,1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) - 2 \cdot P_{1,1,-1}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Da bei der eigentlichen Messung der Korrelationswerte $E_{QM}(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$, $E_{QM}(0, \frac{\pi}{2}, 0)$, $E_{QM}(0, 0, \frac{\pi}{2})$ und $E_{QM}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ fehlerhafte Messbasen gewählt wurden, konnten die Erwartungswerte nicht durch Messung der einzelnen Wahrscheinlichkeiten $P_{A,B,C}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C)$ erhalten werden³. Es wurde allerdings die Abhängigkeit der Koinzidenzraten von Φ_A aufgenommen, aus denen man die Erwartungswerte ableiten kann. Die Polarisatoren waren dabei sowohl in der Quelle als auch im Interferometer auf $|D\rangle$ eingestellt. In Bild 3.6 sind die Koinzidenzen für die jeweiligen Winkelstellungen Φ_B und Φ_C in Abhängigkeit von Φ_A aufgetragen.

³Die obige Betrachtung des Erwartungswertes wird aber im nächsten Kapitel noch einmal benutzt werden.

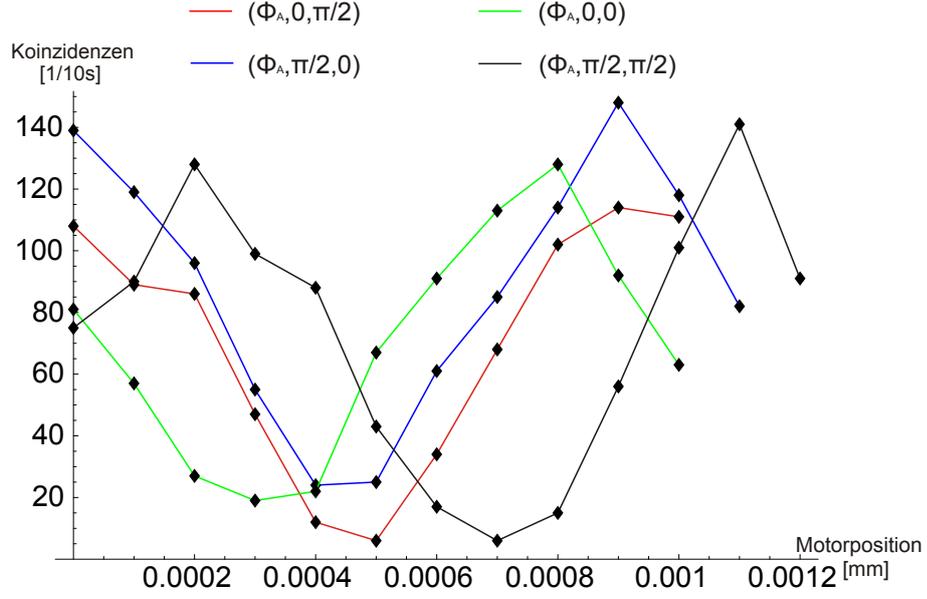


Abbildung 3.6: Koinzidenzzählraten für feste Phaseneinstellungen Φ_B und Φ_C in Abhängigkeit von Φ_A .

Um die Erwartungswerte aus diesen Funktionen bestimmen zu können, betrachten wir noch einmal die Zustände $|A, \Phi_A\rangle$, $|B, \Phi_B\rangle$ und $|C, \Phi_C\rangle$ und führen dort allgemeine Amplituden zwischen $|H\rangle$ und $|V\rangle$ ein. Dadurch lassen sich die Zustände nun wie folgt beschreiben

$$|A, \Phi_A\rangle = (i\beta A e^{i\Phi_A} |a_1\rangle + \alpha |b_1\rangle) \quad (3.11)$$

$$|B, \Phi_B\rangle = (\gamma |V_1\rangle + \delta B e^{i\Phi_B} |H_1\rangle) \quad (3.12)$$

$$|C, \Phi_C\rangle = (\epsilon |V_2\rangle + \xi C e^{i\Phi_C} |H_2\rangle), \quad (3.13)$$

wobei gelten muss, dass $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2 = \epsilon^2 + \xi^2 = 1$ und $0 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \xi \leq 1$ ist. Berechnet man mit diesen nun die Wahrscheinlichkeit analog zu Kapitel 2.4.2, erhält man

$$P_{A,B,C}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) = \frac{1}{2}((\delta\beta\xi)^2 + (\alpha\gamma\epsilon)^2 + 2ABC \cdot \sin(\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C) \cdot \alpha\beta\gamma\delta\epsilon\xi). \quad (3.14)$$

Daraus lässt sich der Erwartungswert zu

$$\begin{aligned} E_{QM}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) &= 8\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\xi \cdot \sin(\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C) \\ &= V \cdot \sin(\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C) \end{aligned} \quad (3.15)$$

bestimmen. Den Wert V wollen wir die Visibility des Erwartungswertes nennen. Für diese Visibility gilt, dass $0 \leq V \leq 1$ ist und kann somit mit der Visibility, die weiter oben definiert wurde gleichgesetzt werden. Um aus den gemessenen Winkelfunktionen den Erwartungswert zu erhalten, müssen zuerst die Visibilities der Kurven aus Bild

3.6 bestimmt werden. Dazu wurden an alle vier Kurven verschiedene Funktionen der Art

$$F(x) = A_f[1 - V_f \sin(f_f \cdot x + c_f)] \quad (3.16)$$

gefittet. Hierbei gibt A_f den Fitparameter für die Amplitude, V_f den Parameter für die Visibility, f_f den Parameter für die Frequenz und c_f den Parameter für die Phasenverschiebung an. Die gefitteten Kurven sind zusammen mit den Koinzidenzen in Bild 3.7 dargestellt.

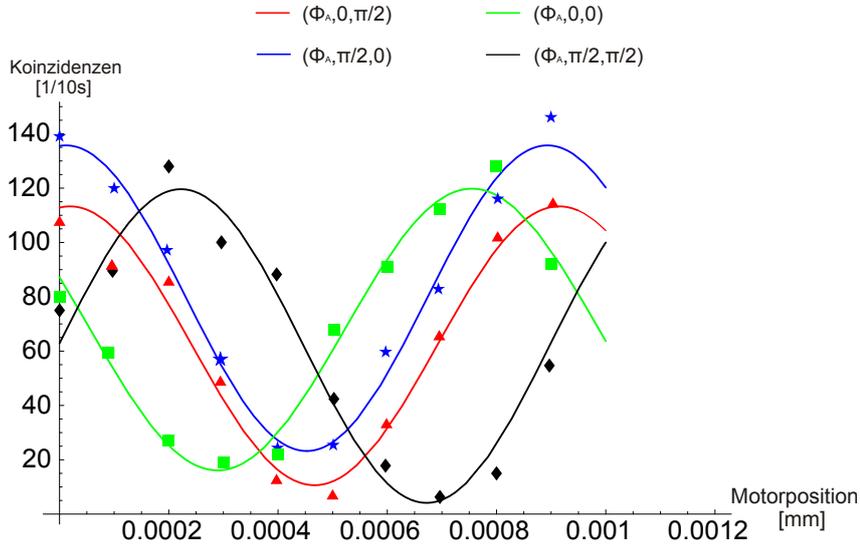


Abbildung 3.7: Gefittete Kurven an die gemessenen Koinzidenzzählraten aus Bild 3.6.

Die dabei benutzten Fitparameter für die Visibility, die Frequenz und den Phasenverschiebung sind in der folgenden Tabelle angegeben. Die Werte der Amplitude wurden nicht mit angegeben, da sie für die weitere Betrachtung nicht von Belang sind. Die Fehler der Frequenz und der Phasenverschiebung wurden ebenfalls nicht mit angegeben, da die durch die Phaseninstabilität des Interferometers entstandenen Fehler, diese bei weitem übersteigen.

Basis	$ V_f $	Fehler von V_f	$f_f[1/\text{mm}]$	c_f
$(\Phi_A, 0, \frac{\pi}{2})$	0,83	$\pm 0,08$	7014	-1,70
$(\Phi_A, \frac{\pi}{2}, 0)$	0,71	$\pm 0,05$	7127	-1,65
$(\Phi_A, 0, 0)$	0,76	$\pm 0,05$	6746	-0,38
$(\Phi_A, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	0,93	$\pm 0,12$	6987	0,02

Tabelle 3.2: Erhaltene Fitwerte der Fitfunktion $F(x) = A_f[1 - V_f \sin(f_f \cdot x + c_f)]$ für die vier unterschiedlichen Basen, mit denen eine Verletzung der Nichtkontextualität gezeigt werden kann.

Diese Koinzidenzfunktionen haben dieselbe Struktur wie der quantenmechanische Erwartungswert $E_{QM}(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C)$. Der einzige Unterschied ist die zu große Amplitude.

Ersetzt man allerdings in der Fitfunktion die Amplitude A_f durch die Visibility und verschiebt die ganze Funktion um -1 in y-Richtung, erhält man dadurch

$$E(x) = -V_f \sin(f_f \cdot x + c_f). \quad (3.17)$$

Diese Kurven haben nun exakt die gleiche Form wie der Erwartungswert in Gleichung (3.15) und sind im folgenden Bild graphisch dargestellt.

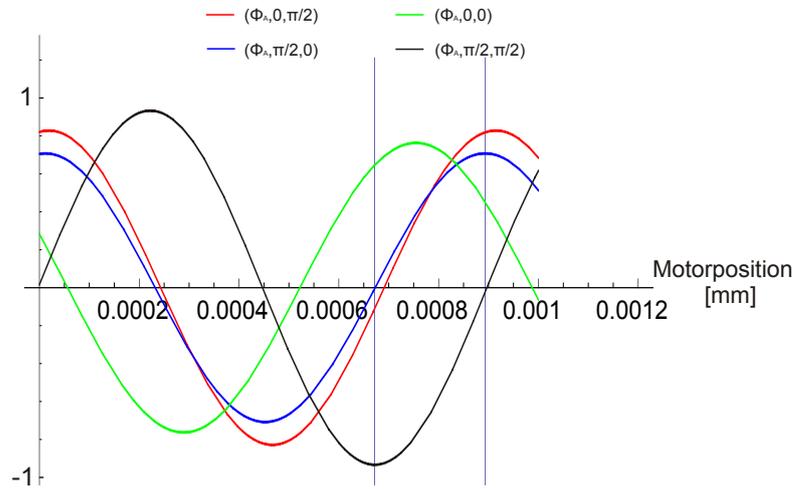


Abbildung 3.8: Die aus den gefitteten Funktionen bestimmten Erwartungswerte sind in Abhängigkeit der Phase Φ_A dargestellt. Die beiden senkrechten Linien geben die Phase an, bei denen die Erwartungswerte eine maximale Verletzung der Nichtkontextualität erreichen.

Um die Erwartungswerte an der richtigen Stelle abzulesen, müssen die Winkel $\Phi_A = 0$ und $\Phi_A = \frac{\pi}{2}$ bestimmt werden. Dazu wurde die blaue Kurve mit den Winkeleinstellungen $\Phi_B = \frac{\pi}{2}$ und $\Phi_C = 0$ gewählt. Laut Gleichung (3.15) erwartet man bei dieser Funktion bei einem Phasenschub von $\Phi_A = \frac{\pi}{2}$ einen Nulldurchgang und für $\Phi_A = 0$ ein Maximum. Diese beiden Stellen sind durch die zwei senkrechten Linien in Bild 3.8 verdeutlicht. Setzt man diese Werte für x in Gleichung (3.17) mit den jeweiligen Fitparametern der Basis aus Tabelle 3.2 ein, erhält man:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) &\approx 0,65 \\ E\left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right) &\approx 0,71 \\ E\left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right) &\approx 0,82 \\ E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\approx -0,93 \end{aligned}$$

Was sofort auffällt ist, dass die erwarteten Korrelationswerte von maximal ± 1 nicht erreicht wurden. Dies liegt zum einen an nicht perfekten Komponenten, z.B. emittiert die Quelle, wie oben gesehen, keinen perfekten theoretischen Zustand. Zum an-

deren sind die optischen Komponenten, aus denen die Quelle und das Interferometer aufgebaut sind, ebenfalls nicht fehlerfrei. Außerdem kommen noch Fehler bei der Justage des Strahlüberlapps im Interferometer, sowie Fehler bei den Einstellungen der Analysepolarisation und des $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchens hinzu. Aus diesem Grund kann der Widerspruch zwischen der Quantenmechanik und NCHV-Theorien nicht direkt aus obigen Erwartungswerten abgelesen werden.

Allerdings lässt sich, wie für den Belltest mit zwei Qubits, eine Ungleichung mit drei Qubits herleiten, welche die Erwartungswerte erfüllen müssen, damit keine Verletzung der Nichtkontextualität auftritt. Die Ungleichung sieht in diesem Fall wie folgt aus[9]

$$-2 \leq E_{NCHV}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - E_{NCHV}(\frac{\pi}{2}, 0, 0) - E_{NCHV}(0, \frac{\pi}{2}, 0) - E_{NCHV}(0, 0, \frac{\pi}{2}) \leq 2. \quad (3.18)$$

Setzt man obige Werte von $E(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$, $E(0, \frac{\pi}{2}, 0)$ und $E(0, 0, \frac{\pi}{2})$ in die Ungleichung ein, erhält man einen Wert von $-2, 17 \pm 0, 11$ und folglich muss der Wert $E_{NCHV}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 0, 17 \pm 0, 11$ betragen, damit die Ungleichung erfüllt bleibt. Der gemessene Wert $E(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = -0, 93 \pm 0, 12$ steht allerdings im kompletten Widerspruch zum erwarteten Wert.

Fehlerbetrachtung

Da die so bestimmten Erwartungswerte eine Abschätzung der tatsächlich zu messenden Werte sind, soll hier nur eine grobe Fehlerabschätzung durchgeführt werden. In Tabelle 3.2 sind die Fehler der einzelnen Visibilitys angegeben, die das Programm zum Fitten der Kurven errechnet hat. Da wir bei allen vier Kurven die Werte mehr oder weniger aus einem Extremum entnehmen, ergeben sich die Fehler der einzelnen Erwartungswerte zu

$$E(\frac{\pi}{2}, 0, 0) = 0, 65 \pm 0, 05 \quad (3.19)$$

$$E(0, \frac{\pi}{2}, 0) = 0, 71 \pm 0, 05 \quad (3.20)$$

$$E(0, 0, \frac{\pi}{2}) = 0, 82 \pm 0, 08 \quad (3.21)$$

$$E(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = -0, 93 \pm 0, 12 \quad (3.22)$$

Daraus ergibt sich der absolute Fehler des zu bestimmenden Erwartungswertes $E_{NCHV}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ zu

$$\Delta E_{NCHV}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \sqrt{(\Delta E(\frac{\pi}{2}, 0, 0))^2 + (\Delta E(0, \frac{\pi}{2}, 0))^2 + (\Delta E(0, 0, \frac{\pi}{2}))^2} \quad (3.23)$$

$$= \sqrt{(0, 05)^2 + (0, 05)^2 + (0, 08)^2} \quad (3.24)$$

$$\approx 0, 11 \quad (3.25)$$

und somit $E_{NCHV}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 0, 17 \pm 0, 11$. Trotz diesem relativ groß abgeschätzten Fehler ergibt sich immer noch ein großer Unterschied zum gemessenen Wert $E(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = -0, 93 \pm 0, 12$.

Man erkennt zusätzlich, dass die grüne Kurve im Gegensatz zu den anderen Kurven leicht außer Phase ist. Dies liegt an der in Kapitel 3.5 beschriebenen Phaseninstabilität des Interferometers.

3.6.2 Verletzung der Nichtkontextualität mithilfe einer Bell-CHSH-Ungleichung

Bei dieser Messung ist, wie in Kapitel 2.5 bereits erwähnt nur das Photon nötig, welches durch das Interferometer propagiert. Da das Photon allerdings im Zustand

$$|\Psi_{in}\rangle = |D\rangle \quad (3.26)$$

in das Interferometer eintreten soll, muss dieser Zustand durch das zweite Photon des verschränkten Photonenpaares festgelegt werden. Da der Zustand der Photonen in der Quelle durch

$$\Psi_{Quelle} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_2\rangle |H_1\rangle + |V_2\rangle |V_1\rangle) \quad (3.27)$$

gegeben ist, kann durch eine Projektion des zweiten Photons auf $|D\rangle$ die Polarisation des ersten ebenfalls auf $|D\rangle$ festgelegt werden. Da hier ebenfalls nur ein Ausgang des Interferometers betrachtet werden kann, ergibt sich der Erwartungswert, ähnlich wie in Gleichung (3.10), zu

$$E_{QM}(\Phi_A; \Phi_B) = 2 \cdot P_{1,1}(\Phi_A, \Phi_B) - 2 \cdot P_{1,-1}(\Phi_A, \Phi_B) \quad (3.28)$$

wobei hier die Detektionswahrscheinlichkeit nur noch von A, B, Φ_A und Φ_B abhängt. Bild 3.9 zeigt die Koinzidenzen für die verschiedenen Phasen Φ_B und die dazugehörigen Analysepolarisationen in Abhängigkeit der Phase Φ_A . Die Winkelpositionen des Glasplättchens, für die eine maximale Verletzung der Bell-CHSH Ungleichung erreicht werden kann, sind durch die zwei senkrechten Linien gekennzeichnet.

Um die Motorposition für die Winkelstellungen $\Phi_A = \pm 0, 75\pi$ zu bestimmen wurde vor der eigentlichen Messung noch einmal eine Kalibrationskurve, mit den Einstellungen $\Phi_B = 0$ und einer Analysepolarisation in $|D\rangle$ aufgenommen, um aus dieser, ähnlich wie in Kapitel 3.5, die beiden Werte für Φ_A zu bestimmen.

Die folgende Tabelle zeigt die aufgenommenen Zählraten in den jeweiligen Messbasen und die damit errechneten Erwartungswerte.

	$K_{1,1}$	$K_{1,-1}$	$E(\Phi_A; \Phi_B)$
$\Phi_A = 0, 75\pi, \Phi_B = 0$	95	27	$0, 56 \pm 0, 05$
$\Phi_A = 0, 75\pi, \Phi_B = \frac{\pi}{2}$	46	96	$-0, 35 \pm 0, 04$
$\Phi_A = -0, 75\pi, \Phi_B = \frac{\pi}{2}$	16	118	$-0, 76 \pm 0, 04$
$\Phi_A = -0, 75\pi, \Phi_B = 0$	22	91	$-0, 61 \pm 0, 05$

Setzt man diese Werte nun in die Bell-CHSH-Ungleichung (2.20) ein, erhält man einen Wert von $S = -2, 28 \pm 0, 09 < -2$.

Es kann also auch mit dem Belltest eine eindeutige Verletzung der Nichtkontextualität erreicht werden.

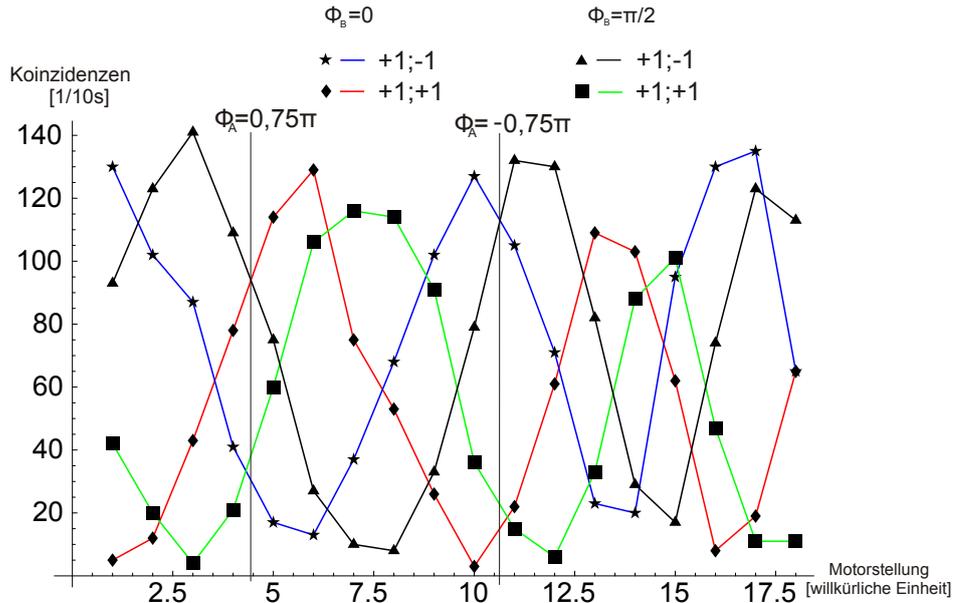


Abbildung 3.9: Koinzidenzzählraten für feste Phaseneinstellungen Φ_B in Abhängigkeit der Phase Φ_A . Die Messpunkte an den beiden senkrechten Linien führen zu einer Verletzung der Bell-CHSH Ungleichung.

Fehlerbetrachtung

Der absolute Fehler der Photonenzählrate ist wie folgt definiert

$$\Delta K = \sqrt{K}. \quad (3.29)$$

Die Fehlerrechnung soll für den Wert $E(0, 75\pi; 0)$ durchgeführt werden, die anderen Fehler berechnen sich analog zu diesem.

$$E(0, 75\pi; 0) = \frac{136 \pm 11,66}{244} = 0,557 \pm 0,045 \approx 0,56 \pm 0,05 \quad (3.30)$$

Für die anderen Erwartungswerte ergibt sich, wie bereits in obiger Tabelle erwähnt: $E(0, 75\pi; \frac{\pi}{2}) = -0,35 \pm 0,04$, $E(-0, 75\pi; \frac{\pi}{2}) = -0,76 \pm 0,04$ und $E(-0, 75\pi; 0) = -0,61 \pm 0,05$.

Der Fehler des Bellparameters S ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \Delta S &= \sqrt{(\Delta E(0, 75\pi; \frac{\pi}{2}))^2 + (\Delta E(0, 75\pi, 0))^2 + (\Delta E(-0, 75\pi, 0))^2 + (\Delta E(-0, 75\pi, \frac{\pi}{2}))^2} \\ &= \sqrt{2(0,05)^2 + 2(0,04)^2} \approx 0,09 \end{aligned} \quad (3.31)$$

4 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass es möglich ist, trotz der relativ kurzen Stabilitätszeit des Interferometers, eine Zustandstomographie des präparierten vierdimensionalen Zustands mit einer Fidelity von $F = 0,96$ zu erhalten. Durch eine theoretische Behandlung des Interferometers stellte sich heraus, dass dieser Wert dem Maximum sehr nahe ist, welches man mit diesem Aufbau erreichen kann. Dies liegt vor allem daran, dass die Rückreflexionsprismen die Polarisation der einfallenden Photonen leicht drehen. Desweiteren spaltet der BS die ankommenden Strahlen nicht in einem perfekten 50 : 50 Verhältnis auf und der PBS ist ebenfalls nicht fehlerfrei.

Des Weiteren war es möglich, trotz der geringen Anzahl an Koinzidenzen und den relativ kurzen Messzeiten, mithilfe eines Belltests und einer Messung mit einem GHZ-Zustand, einen Widerspruch zwischen NCHV-Theorien und der Quantenmechanik aufzuzeigen.

Mithilfe des Belltests konnte ein Bellparameter von $|S| = 2,28 \pm 0,09$ erreicht werden. Dieser liegt innerhalb seiner Fehlergrenzen über zwei und ist somit ausreichend, um eine Verletzung der Nichtkontextualität zu zeigen, allerdings liegt er aber auch deutlich unter dem maximal erreichbaren Wert von $|S| = 2\sqrt{2}$.

Gleiches gilt auch für die Messung, die mit einem GHZ-Zustand durchgeführt wurde, bei der ebenfalls eine Verletzung der Nichtkontextualität gezeigt werden konnte. Die erreichten Erwartungswerte liegen jedoch ebenfalls deutlich unter den maximal erreichbaren Werten. Dies liegt an den zum Teil sehr niedrigen Visibilitäts, die die Kalibrationskurven hatten, aus denen die Erwartungswerte bestimmt wurden.

Um die Fehler bei den einzelnen Messungen zu minimieren, wäre es notwendig, die Tests mit einer größeren Anzahl an Koinzidenzen durchzuführen.

Sollte das Interferometer für weitere Anwendungen benutzt werden, die eine längere Stabilität des Interferometers benötigen, wäre eine aktive Stabilisierung oder zumindest eine Unterbringung auf einem schwingungsgedämpften Tisch unumgänglich.

Will man auf eine aktive Stabilisierung verzichten, wäre eine weitere Möglichkeit, das Interferometer durch ein intrinsisch stabiles Sagnac-Interferometer zu ersetzen [12].

Literaturverzeichnis

- [1] Isabel Krebs. Erzeugung und Analyse von Hyperentanglement mit einem Michelson-Interferometer. Bachelorarbeit, LMU München, 2010.
- [2] Albert Einstein, Boris Podolski, and Nathan Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete. *Physical Review*, 47:777, 1935.
- [3] Jan von Delft. Quantum Matter.
<http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/09qm/>.
- [4] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [5] N. David Mermin. Hidden Variables and the two theorems of John Bell. *Reviews of Modern Physics*, 65:803, 1993.
- [6] John S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics*, 1:195, 1964.
- [7] Daniel M. Greenberger, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Anton Zeilinger. Bell's theorem without inequalities. *American Journal of Physics*, 58:1131, 1990.
- [8] Hinweise zum F1 Praktikumsversuch Bellsche Ungleichung. <http://xqp.physik.uni-muenchen.de/teaching/praktikum/index.html>.
- [9] Markus Michler, Harald Weinfurter, and Marek Żukowski. Experiments towards Falsification of Noncontextual Hidden Variable Theories. *Physical Review Letters*, 84:5457, 2000.
- [10] Gregor Weihs. *Ein Experiment zum Test der Bellschen Ungleichung unter Einsteinscher Lokalität*. PhD thesis, Institut für Experimentalphysik der Universität Wien.
- [11] Daniel F. V. James, Paul G. Kwiat, William J. Munro, and Andrew G. White. Measurement of qubits. *Physical Review A*, 64, 2001.
- [12] Wei-Bo Gao, Chao-Yang Lu, Xing-Can Yao, Ping Xu, Otfried GÄhne, Alexander Goebel, Yu-Ao Chen, and Jian-Wei Pan Cheng-Zhi Peng, Zeng-Bing Chen. Experimental demonstration of a hyper-entangled ten-qubit Schrödinger cat state. *Nature Physics*, 6:331, 2010.

Danksagung

Ich möchte mich ganz herzlich bei Daniel, Roland und Christian für die vielen lehrreichen Diskussionen und die tolle Unterstützung während der letzten 10 Wochen bedanken.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, Martin Reitter, die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

München, den 12.7.2010