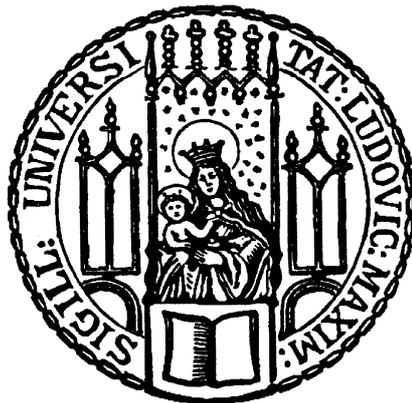

Erzeugung von Zwei-Qubit-Hyperentanglement mit einem Sagnac-Interferometer

Thomas Reimann



MÜNCHEN 2011

Erzeugung von Zwei-Qubit-Hyperentanglement mit einem Sagnac-Interferometer

Thomas Reimann

BACHELORARBEIT

AN DER

LUDWIGS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR PHYSIK

LEHRSTUHL FÜR LASERSPEKTROSKOPIE
(PROF. DR. THEODOR HÄNSCH)

ARBEITSGRUPPE EXPERIMENTELLE QUANTENPHYSIK
(PROF. DR. HARALD WEINFURTER)

VORGELEGT AM 01. SEPTEMBER 2011

Verfasser: Thomas Reimann
Betreuer: Christian Schwemmer
Korrektor: Prof. Dr. Harald Weinfurter

For Scottie, beam me up!

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Quantenmechanik der Qubits	3
2.1	Beschreibung von Qubit-Zuständen	3
2.1.1	Photonen als Quantenbits	3
2.1.2	Observablen und Transformationen	6
2.1.3	Gemischte Zustände	7
2.2	Verschränkung von Qubits	10
2.2.1	Bell-Zustände und Hyperentanglement	10
2.2.2	Verschränkung in Ensembles	12
2.2.3	Verschränkungsmaße	13
2.3	Quantenzustands-Tomographie	17
2.3.1	Lineare Rekonstruktion der Dichtematrix	17
2.3.2	Maximum-Likelihood-Methode	19
3	Experimentelle Realisierung des Bell-Zustandes	21
3.1	Beschreibung und Justage des verwendeten Aufbaus	21
3.1.1	Darstellung der Versuchsanordnung	21
3.1.2	Aufbau der Sagnac-Schleife und Methodik der Feinjustage	24
3.2	Charakterisierung des Interferometers	26
3.2.1	Visibility	26
3.2.2	Stabilität	30
3.2.3	Effizienz	32
3.3	Tomographische Analyse des erzeugten Zustandes	33
3.3.1	Maximum-Likelihood-Abschätzung	33
3.3.2	Nachweis der Verschränkung und Fehleranalyse	35
4	Zusammenfassung und Ausblick	37

Brain, n. An apparatus with which we think that we think...

-The Devil's Dictionary (1911)

When I hear about Schrödinger's cat, I reach for my gun.

-Stephen Hawking

1 Einleitung

Mit der Entdeckung und Formulierung der Quantentheorie im Laufe des letzten Jahrhunderts entstand eine völlig neue und kontraintuitive Sichtweise der physikalischen Realität, die auch eine Fülle an technologischem Fortschritt mit sich brachte. Prominente Beispiele dafür, wie etwa Dense Coding und Teleportation, finden sich vor allem im Bereich der Quantenkommunikation, -kryptographie und des Quantencomputing. Eine zentrale Ressource für viele dieser Anwendungen ist die von E. Schrödinger getaufte Verschränkung [Sch35], welche 1935 A. Einstein, B. Podolski und N. Rosen zur Formulierung ihres berühmten EPR-Paradoxons bzgl. der Unvollständigkeit der Quantenmechanik veranlasste [EPR35]. Die Diskussion um die damit aufgekommenen Zweifel wurde erst im Jahre 1964 von J. Bell wieder aufgegriffen. Er konnte zeigen, dass die intuitiven Forderungen von EPR an jede physikalische Theorie experimentell überprüfbare Konsequenzen nach sich ziehen, die sich in den bekannten Bell-Ungleichungen manifestieren [Bel]. Die Verschränkung erfährt seitdem ein besonderes Maß an Aufmerksamkeit, insbesondere ihre kohärente Erzeugung und deren Nachweis im Experiment.

Das Ziel dieser Arbeit ist nun die experimentelle Erzeugung eines mit sich selbst verschränkten Photons in einem Sagnac-Interferometer. Neben Aufbau und Justage besteht die Hauptaufgabe vor allem in der Einschätzung der Güte der Versuchsanordnung. Dazu muss einerseits die Qualität des Präparationsprozesses und Stabilität des Interferometers überprüft sowie andererseits dessen Effizienz bestimmt werden.

Der Text gliedert sich in drei Teile. Zunächst werden im ersten Kapitel die wichtigsten theoretischen Grundlagen, Notationen und Methoden zur Einschätzung der Güte des Interferometers eingeführt. Daran anschließend folgt eine Beschreibung des Versuches sowie der relevanten Messungen. Im letzten Teil der Arbeit werden die wichtigsten Ergebnisse noch einmal zusammengefasst und ein Ausblick auf potentielle Erweiterungen gegeben.

2 Quantenmechanik der Qubits

2.1 Beschreibung von Qubit-Zuständen

Der Begriff 'Qubit' wurde 1995 von B. Schumacher in seiner Veröffentlichung [Sch95] geprägt und beschreibt das quantenmechanische Äquivalent zum klassischen Bit. Ein Quantenbit kann durch ein beliebiges Zweiniveau-System realisiert werden, das jedoch im Gegensatz zum klassischen Bit neben den Werten 0 und 1 auch beliebige Superpositionen daraus annehmen kann. Bekannte Beispiele solcher Qubits sind die Energieniveaus von Atomen bzw. Ionen und die Polarisation von Photonen.

Photonen sind (ruhe-)masselose Spin-1-Bosonen, die drei entartete Spin Eigenzustände mit Richtungsquantenzahlen $+1, 0$ und -1 besitzen. Es ist bekannt, dass diese jedoch nur zwei zueinander orthogonale Polarisationen (und beliebige Superpositionen daraus) aufweisen können. Will man Letztere mit den Spin-Einstellungen identifizieren, so stellt sich die Frage, warum es dann nicht auch drei (paarweise orthogonale) Polarisationen gibt.

Eine mathematische Betrachtung freier elektromagnetischer Felder in kovarianter Formulierung zeigt jedoch, dass bei gegebener Ausbreitungsrichtung nur zwei Helizitätseinstellungen des Spins auftreten können, nämlich $+1$ und -1 . Letztere können mit rechts- bzw. linkszirkularer Polarisation identifiziert werden, die durch geeignete Superposition beliebige andere Einstellungen, wie zum Beispiel lineare oder elliptische Polarisation, erzeugen. Damit spannen sie einen zweidimensionalen Hilbertraum \mathcal{H}_s auf, der als Quantenbit interpretiert werden kann.

2.1.1 Photonen als Quantenbits

Polarisation als Zweiniveau-System

Für die weiteren mathematischen Betrachtungen wird die übliche Dirac- bzw. Zeilen-Spalten-Notation verwendet.

Jeder Polarisationszustand $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_s$ eines Photons kann als Linearkombination bzgl. einer Basis ausgedrückt werden. Im Folgenden wird dafür die sog. Z-Basis (engl. 'computational basis'),

$$|H\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{H,V}, \quad |V\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{H,V}, \quad \langle H|V\rangle = 0, \quad (2.1)$$

verwendet [Wol08]. Es entsprechen dabei $|H\rangle$ horizontaler und $|V\rangle$ vertikaler Polarisation. Die Indizes der Spaltenvektoren geben die jeweils zugrundeliegende Basis an.

Ein beliebiger Qubit-Zustand $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_s$ kann damit ganz allgemein als

$$|\Psi\rangle = \alpha |H\rangle + \beta |V\rangle \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (2.2)$$

dargestellt werden. Wichtige Spezialfälle aus der Praxis sind diagonale (Plus) bzw. an-

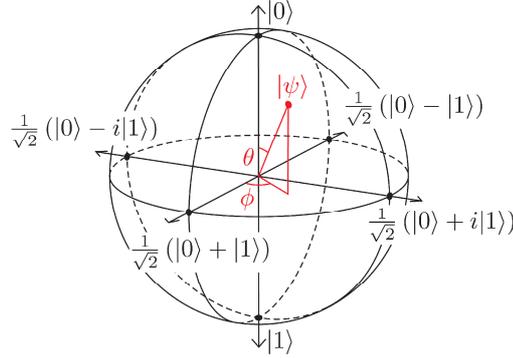


Abbildung 2.1: Blochkugel, Poincaré-Sphäre in der logischen Notation $|0\rangle \equiv |H\rangle$ und $|1\rangle \equiv |V\rangle$. Die Kugeloberfläche repräsentiert den Hilbertraum eines Qubits. Ein Zustand $|\Psi\rangle_{\theta,\phi}$ kommt durch eine θ -Drehung um die R/L-Achse und eine ϕ -Rotation um die H/V-Achse zustande [Kie07]. (Abbildung entnommen aus [Tro07, s. 6]).

tidagonale (Minus),

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - |V\rangle), \quad (2.3)$$

sowie links- und rechtszirkulare Polarisation:

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + i|V\rangle), \quad |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - i|V\rangle). \quad (2.4)$$

Zur Veranschaulichung der Qubit-Zustände lässt sich aus (2.2) eine geometrische Darstellung ableiten. Mit Hilfe der Polardarstellung komplexer Zahlen ergibt sich zunächst, dass

$$|\Psi\rangle = \alpha |H\rangle + \beta |V\rangle = (|\alpha| |H\rangle + |\beta| e^{i(\phi_\beta - \phi_\alpha)} |V\rangle) e^{i\phi_\alpha}. \quad (2.5)$$

Die globale Phase $i\phi_\alpha$ kann ignoriert oder gleich Null gesetzt werden¹, sodass der Zustand nunmehr durch die zwei Parameter $|\alpha|$ bzw. $|\beta|$ und ϕ_β eindeutig bestimmt ist. Mit $\phi_\alpha = 0$, $\phi_\beta \equiv \phi$ sowie den naheliegenden Definitionen $|\alpha| = \cos(\theta/2)$, $|\beta| = \sin(\theta/2)$ erhält man [Kie07]:

$$|\Psi\rangle_{\theta,\phi} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |H\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} |V\rangle, \quad \theta = 2 \arctan\left(\frac{|\alpha|}{|\beta|}\right). \quad (2.6)$$

Dabei sind $\theta \in [0, \pi]$ und $\phi \in [0, 2\pi]$. Die Gesamtheit aller möglichen Zustände (und Operationen) lässt sich mithilfe von (2.6) sehr anschaulich in der Bloch- bzw. Poincaré-Sphäre repräsentieren (s. Abb. 2.1), wobei der Vektor $|\Psi\rangle_{\theta,\phi}$ einem Punkt auf der Kugeloberfläche entspricht. Bei dieser geometrischen Darstellung ist jedoch zu beachten, dass globale Phasen - die jedoch ohnehin keine physikalische Relevanz besitzen - nicht mehr erkennbar sind.

¹Der (reine) Zustand $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_s$ ist genau genommen nur *ein* beliebiger Repräsentant der Äquivalenzklasse $[\Psi] = \{e^{i\phi} |\Psi\rangle : \phi \in [0, 2\pi]\}$.

Realisierung eines Qubits mit räumlichen Photon-Moden

Wie anfangs erwähnt ist die Polarisation lediglich *eine* Möglichkeit zur Realisierung eines Qubits. Ist ein Photon hinsichtlich seiner Bewegungsfreiheit durch experimentelle Gegebenheiten auf wohldefinierte Pfade beschränkt, so lässt sich damit ebenfalls ein Zweiniveausystem simulieren [Tha05]. Prominente Beispiele hierfür sind das Mach-Zehnder-, Michelson- und Sagnac-Interferometer. Hierbei werden dem Photon mithilfe eines Beamsplitters zwei 'Propagations-Pfade' angeboten. Die zugehörige Messstatistik lässt sich im Rahmen des Dirac-Formalismus beschreiben, indem beide Wege mit den Basis-Zuständen

$$|a\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{a,b}, \quad |b\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{a,b}, \quad \langle a|b\rangle = 0 \quad (2.7)$$

identifiziert werden. Diese Vektoren spannen den zweidimensionalen Hilbert-Raum der 'Raummoden' \mathcal{H}_o auf, welcher als Repräsentant eines Qubits aufgefasst werden kann. Nach einem 50:50-Strahlteiler ergibt sich zum Beispiel der Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle + |b\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{a,b} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{a,b} \right),$$

mit gleichen Detektionswahrscheinlichkeiten in beiden Armen.

Zusammengesetzte Systeme

Die bisherigen Betrachtungen sollen nun auf Systeme erweitert werden, die aus mehreren Qubits bestehen. Der zugehörige gemeinsame Zustandsraum \mathcal{H} entsteht durch Tensorproduktbildung über die beteiligten Teilsysteme \mathcal{H}_i [Wol08]:

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i, \quad \dim \mathcal{H} = 2^N. \quad (2.8)$$

Es kann sich dabei um ein Vielteilchensystem oder um die Freiheitsgrade eines einzelnen Teilchens handeln. In (2.8) wurde dabei bereits implizit angenommen, dass die Qubits untereinander unterscheidbar, also nummerierbar sind [Kie07]. Wählt man in jedem \mathcal{H}_i noch eine Basis $\{|\phi_{a_i}^{(i)}\rangle\}$, so kann ein beliebiger Zustand $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ als Linearkombination

$$|\Psi\rangle = \sum_{a_1, \dots, a_N} c_{a_1, a_2, \dots, a_N} |\phi_{a_1}^{(1)}\rangle |\phi_{a_2}^{(2)}\rangle \cdots |\phi_{a_N}^{(N)}\rangle, \quad a_i = 1, 2, \quad (2.9)$$

mit eindeutigen Entwicklungskoeffizienten ausgedrückt werden.

Das für diese Arbeit relevante Zwei-Qubit-System besteht aus einem Photon, das einen Polarisations- sowie einen raumartigen Freiheitsgrad aufweist. Der zugehörige Hilbertraum ergibt sich demnach mit (2.1) bzw. (2.7) zu

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_o, \quad (2.10)$$

wobei $\mathcal{H}_o = \text{span}\{|a\rangle, |b\rangle\}$ und $\mathcal{H}_s = \text{span}\{|H\rangle, |V\rangle\}$. Man erhält insgesamt einen vier-

dimensionalen Hilbertraum mit der Tensorproduktbasis

$$|H\rangle|a\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |H\rangle|b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |V\rangle|a\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |V\rangle|b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und allgemeinen Zuständen der Form

$$|\Psi\rangle = \alpha|H\rangle|a\rangle + \beta|H\rangle|b\rangle + \gamma|V\rangle|a\rangle + \delta|V\rangle|b\rangle. \quad (2.11)$$

2.1.2 Qubit-Observablen und -Transformationen

Jede Observable wird repräsentiert durch einen hermiteschen Operator \hat{O} , dessen Spektraldarstellung die Menge aller möglichen Ergebnisse in Form der Eigenwerte und -zustände angibt. Durch den Messvorgang wird der Systemzustand $|\Psi\rangle$ mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit (irreversibel) in einen dieser Eigenzustände projiziert. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt sich aus der Entwicklung von $|\Psi\rangle$ in die Eigenbasis von \hat{O} [NC10]. Eine Vielzahl solcher Messungen an identisch präparierten Systemen führt auf den Erwartungswert:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\Psi} = \langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle.$$

Für polarisierte Photonen wurden im Abschnitt 2.1.1 die drei Basen Plus/Minus (2.3), R/L (2.4) sowie H/V (2.1) eingeführt. Die korrespondierenden Observablen sind die Pauli-Matrizen $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$ und $\hat{\sigma}_3$ mit Eigenwerten ± 1 , deren Spektraldarstellungen (Zerlegung in Projektoren) gegeben sind durch [Kie07]:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{H,V} = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|, \quad (2.12)$$

$$\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}_{H,V} = |L\rangle\langle L| - |R\rangle\langle R|, \quad (2.13)$$

$$\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{H,V} = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|. \quad (2.14)$$

Neben projektiven Messungen können Qubits auch durch unitäre Transformationen in andere Zustände übergeführt werden. Diese Prozesse sind per Definition reversibel und korrespondieren mit Rotationen auf der Blochkugel. Zum Beispiel vermittelt $\hat{\sigma}_1$ eine 180° Drehung um die +/- Achse:

$$\hat{\sigma}_1 |H\rangle = |V\rangle \xrightarrow{\text{unitär}} \hat{\sigma}_1^{-1} |V\rangle = |H\rangle.$$

Entscheidend ist, dass jede beliebige Observable \hat{O} oder unitäre Transformation als Linearkombination der Pauli-Matrizen (und der Identität $\hat{\sigma}_0 = \hat{1}$),

$$\hat{O} = \frac{1}{2} \left(a_0 \hat{\sigma}_0 + \sum_{i=1}^3 a_i \hat{\sigma}_i \right) \equiv \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix}_{H,V}, \quad (2.15)$$

ausgedrückt werden kann [Tha05]. Diese Darstellung ist in Analogie zur Entwicklung eines Vektors in Basisvektoren zu verstehen. Die Koeffizienten erhält man durch Spurbildung (Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt²):

$$a_0 = \text{tr } \hat{O} \quad , \quad a_i = \text{tr } (\hat{O} \hat{\sigma}_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.16)$$

Für zusammengesetzte Systeme, wie zum Beispiel $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_o$ nach (2.11), ergeben sich die entsprechenden Operatoren wieder durch Tensorproduktbildung [Wol08]:

- O_1 wirkt nur auf \mathcal{H}_s : $\hat{O}_1 \otimes \hat{1}_o$
- O_2 wirkt nur auf \mathcal{H}_o : $\hat{1}_s \otimes \hat{O}_2$
- O_1, O_2 wirken auf \mathcal{H}_s und \mathcal{H}_o : $\hat{O}_1 \otimes \hat{O}_2$

2.1.3 Qubit-Ensembles

In der Praxis ist es nicht immer möglich, *einen* bestimmten reinen Zustand für ein Quantensystem anzugeben - etwa, weil mehrere verschiedene $|\Psi_i\rangle \in \mathcal{H}$ mit gewissen Wahrscheinlichkeiten p_i ($i = 1, \dots, k$) auftreten können.³ Man spricht in solchen Fällen von gemischten Zuständen bzw. von einem statistischen Ensemble. Zur mathematischen Beschreibung solcher Systeme dient ein allgemeinerer Formalismus, bei dem an Stelle von Zustandsvektoren lineare Operatoren (Dichtematrizen) verwendet werden [Wol08]. Diese bilden in Analogie zu den herkömmlichen Hilbertvektoren (bzgl. der Hilbert-Schmidt-Norm) eine Kugel im zugehörigen Operatorraum $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und können wegen ihrer reicheren inneren Struktur mehr Informationen über das System enthalten.⁴ Alle denkbaren physikalischen Zustände befinden sich innerhalb dieser Kugel, wobei deren Rand den reinen Hilbertvektoren entspricht.

Das anfangs definierte Ensemble wird durch eine dieser Dichtematrizen $\hat{\rho} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ beschrieben [NC10]:

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^k p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1. \quad (2.17)$$

Es ist jedoch zu beachten, dass diese Darstellung nicht eindeutig ist, d.h. es kann mehrere Ensembles von reinen Zuständen geben, die zu den selben Dichtematrizen führen.

Erwartungswerte von Observablen \hat{O} ergeben sich nun durch Mittlung über alle beteiligten Zustände $|\Psi_i\rangle$, d.h.

$$\langle \hat{O} \rangle_{\rho} = \sum_i p_i \langle \hat{O} \rangle_{\Psi_i} = \sum_i p_i \langle \Psi_i | \hat{O} | \Psi_i \rangle = \text{tr} (\hat{O} \hat{\rho}). \quad (2.18)$$

Für die in der Einleitung dargelegten Zielsetzungen dieser Arbeit ist es nötig, anhand einer rekonstruierten Dichtematrix zu untersuchen, wie gut der Präparationsprozess im Experiment letztendlich funktioniert. Um in diesem Zusammenhang beurteilen zu können, ob es sich um ein sinnvolles Ergebnis handelt oder nicht, müssen jedoch erst die

²Das Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt zweier Operatoren ist definiert als $(\hat{A}, \hat{B}) := \text{tr} (\hat{A}^\dagger \hat{B})$ und impliziert die Operatornorm $\|\hat{A}\| := \sqrt{\text{tr} (\hat{A}^\dagger \hat{A})}$.

³Diese reinen (Produkt-)Zustände müssen nicht paarweise orthogonal sein.

⁴Im Rahmen dieser Arbeit sind nur endlichdimensionale Systeme relevant, d.h. quadratische Matrizen mit $n \times n$ Einträgen: $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} : A \text{ linear, beschränkt}\} \cong \mathbb{C}^{n \times n}$.

Eigenschaften, denen jede physikalische Dichtematrix genügen muss, festgelegt werden. Dies lässt sich auch vom theoretischen Standpunkt aus motivieren, denn nicht alle Elemente des Operatorraumes $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ beschreiben auch physikalische Systeme. Man fordert daher stets [Wol08, NC10]:

$$\text{Positiv semi definit:} \quad \langle \Psi | \hat{\rho} | \Psi \rangle \geq 0 \quad \forall |\Psi\rangle \in \mathcal{H}, \quad (2.19)$$

$$\text{Normierung der Spur:} \quad \text{tr}(\hat{\rho}) = 1. \quad (2.20)$$

Die Menge aller positiven Operatoren mit Spur Eins wird ab jetzt mit $\mathcal{D}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ bezeichnet.

Ein reiner Zustand entspricht einem Ensemble mit nur einem Mitglied, d.h. ein einziger Hilbertvektor, wie zum Beispiel $|\Psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$, wird mit Wahrscheinlichkeit 1 präpariert:

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle \Psi| \equiv \begin{pmatrix} \langle H | \hat{\rho} | H \rangle & \langle H | \hat{\rho} | V \rangle \\ \langle V | \hat{\rho} | H \rangle & \langle V | \hat{\rho} | V \rangle \end{pmatrix}_{H,V} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha^* & \alpha\beta^* \\ \beta\alpha^* & \beta\beta^* \end{pmatrix}_{H,V}.$$

Die diagonalen Matrixelemente werden als 'Populationen' bezeichnet, da sie die Wahrscheinlichkeiten angeben, mit denen das System in die entsprechenden Eigenzustände der gewählten Messbasis projiziert wird. Die Nebendiagonalelemente heißen 'Kohärenzen' und verkörpern die Interferenzfähigkeit des Zustandes.

Im Fall des 'weißen Rauschens' (engl. 'white noise'), also der gleich-gewichteten Mischung von Basiszuständen, verschwinden die Kohärenzen. Dieser Zustand ist nicht mehr durch einen Vektor aus dem Hilbertraum darstellbar [Kie07] und hat die folgende Dichtematrix:

$$\hat{\rho}_{wr} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}_{H,V} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}_{+,-} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}_{R,L}. \quad (2.21)$$

Es treten hierbei keinerlei Interferenzeffekte auf, weshalb dieser Zustand auch als inkohärente Überlagerung bzw. als maximal gemischt bezeichnet wird.

Ein weiterer Vorteil des Dichtematrix-Formalismus wird deutlich, wenn die reinen Zustände des Ensembles zusammengesetzte Systeme beschreiben. Durch Bildung der partiellen Spur lassen sich die lokalen Zustände der Teilsysteme ableiten⁵, was insbesondere für die Untersuchung von Verschränkung hilfreich ist.

Die formale Definition der partiellen Spur ist, zum Beispiel für $\hat{\rho}_{s,o} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_o)$, gegeben durch [Wol08]:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_s &:= \text{tr}_o(\hat{\rho}_{s,o}) = \langle a | \hat{\rho}_{s,o} | a \rangle + \langle b | \hat{\rho}_{s,o} | b \rangle, \\ \hat{\rho}_o &:= \text{tr}_s(\hat{\rho}_{s,o}) = \langle H | \hat{\rho}_{s,o} | H \rangle + \langle V | \hat{\rho}_{s,o} | V \rangle. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Bei dieser Reduktion der Dichtematrix gehen jedoch Informationen über das Gesamtsystem verloren. Es ist daher nicht möglich, den ursprünglichen Zustand aus den durch 'ausspüren' gewonnenen Dichteoperatoren zurückzugewinnen.

⁵Diese Abbildung ist die Einzige, die den gesamten Zustandsraum linear auf einen der Teilräume abbildet und zudem dessen lokale Messstatistik erhält [NC10].

Reinheit von Quantenzuständen

Neben der gesonderten Untersuchung von Teilsystemen ermöglicht der Dichtematrixformalismus außerdem die Quantifizierung der „Reinheit“ eines Zustandes. Dies ist insbesondere für experimentelle Anwendungen relevant. Das zugehörige Maß lässt sich direkt aus der Diagonaldarstellung der Dichtematrix $\hat{\rho}_d \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$,

$$\hat{\rho}_d = \sum_j \lambda_j |\phi_j\rangle \langle \phi_j|, \quad \sum_j \lambda_j = \text{tr } \hat{\rho}_d = 1, \quad (2.23)$$

ableiten [Wol08], wobei $\{|\phi_j\rangle\}$ die Eigenbasis und λ_j die -werte sind. $\hat{\rho}_d$ beschreibt das sog. Eigenensemble [BZ06], welches aus paarweise orthogonalen Hilbertvektoren besteht. Zum Beispiel ist für $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$:

$$\hat{\rho}_+ \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{H,V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{+,-}.$$

Betrachtet man nun die Spur von $\hat{\rho}_d^2$, so ergibt sich

$$\text{tr}(\hat{\rho}_d^2) = \sum_j \lambda_j^2 \leq 1,$$

da stets $\lambda_j \geq 0$ und $\sum_j \lambda_j = 1$. Der Gleichheitsfall tritt nur dann ein, wenn genau ein Eigenwert gleich Eins ist, also bei einem reinen Zustand. Da die Spur unabhängig von der gewählten Basis ist, lässt sich dieses Kriterium auch auf nicht-diagonale Dichtematrizen $\hat{\rho}$ übertragen [NC10]:

- $\text{tr}(\hat{\rho}^2) = 1 \iff$ Zustand ist rein.
- $\text{tr}(\hat{\rho}^2) < 1 \iff$ Zustand ist gemischt.

Entsprechend wird die Reinheit (engl. 'Purity') P definiert als:

$$P(\hat{\rho}) := \text{tr } \hat{\rho}_d^2 = \text{tr } \hat{\rho}^2, \quad (2.24)$$

wobei sich $P = 0.5$ für den maximal gemischten (2.21) und $P = 1$ für einen reinen Zustand ergeben.

Eine alternatives Maß, das die Reinheit eines Zustandes quantifizieren kann, ist die von Neumann Entropie [JKMW01],

$$S := -\text{tr}(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho}) = -\sum_j \lambda_j \log_2 \lambda_j. \quad (2.25)$$

Für einen reinen Zustand ist $S = 0$, der Wert für einen maximal gemischten Zustand hängt jedoch von der Anzahl der beteiligten Teilsysteme ab. Für zwei Qubits ergibt sich beispielsweise $S = 2$.

Zustandsüberlapp und Fidelity

Die Purity stellt eine erste Einschätzung der Güte eines experimentell erzeugten Zustandes dar. Es muss jedoch ebenfalls dessen Überlapp mit der theoretischen Erwartung überprüft werden können. Eine gängige Metrik zur Quantifizierung des Abstandes

zwischen zwei Dichtematrizen (Quantenzuständen) $\hat{\rho}$ und $\hat{\eta}$ ist die von Uhlmann 1976 eingeführte 'Fidelity' [Uhl85]. Sie ist definiert als

$$F(\hat{\eta}, \hat{\rho}) := \left(\text{tr} \sqrt{\sqrt{\hat{\eta}} \hat{\rho} \sqrt{\hat{\eta}}} \right)^2. \quad (2.26)$$

und kann Werte zwischen 1 und 0 annehmen, wobei Ersterer einen vollständigen und Letzterer gar keinen Überlapp der beiden Zustände impliziert.

Ist eines der beiden Argumente ein reiner Zustand, etwa weil es sich bei $\hat{\eta}$ um den theoretisch erwarteten Zustand $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ handelt, so vereinfacht sich (2.26) wegen $\sqrt{|\Psi\rangle\langle\Psi|} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ zu [Kie07]:

$$F(|\Psi\rangle\langle\Psi|, \hat{\rho}) = \left(\text{tr} \sqrt{|\Psi\rangle\langle\Psi| \hat{\rho} |\Psi\rangle\langle\Psi|} \right)^2 = \langle\Psi|\hat{\rho}|\Psi\rangle. \quad (2.27)$$

2.2 Verschränkung von Qubits

Die Fidelity und Purity ermöglichen zwar eine rudimentäre Beurteilung der Funktionsfähigkeit der Versuchsanordnung, sind allerdings nicht im Stande, Verschränkung nachzuweisen oder zu charakterisieren. Das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Sagnac-Interferometer soll einen maximal verschränkten Bell-Zustand präparieren, bei dem die Polarisation mit den Raummoden eines Photons verschränkt ist. Die adäquate Analyse eines solchen Zustandes erfordert daher eine Reihe zusätzlicher mathematischer Hilfsmittel, die sich aus den grundlegenden Eigenschaften der Verschränkung ableiten lassen.

2.2.1 Bell-Zustände und Hyperentanglement

Der reine Quantenzustand $|\Psi\rangle$ eines N-Parteiensystemes $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ heißt separabel, falls er sich als Tensorprodukt der einzelnen Untersysteme schreiben lässt [Wol08, GT09, Min04], d.h.

$$|\Psi\rangle = \bigotimes_{i=1}^N |\Psi_i\rangle \quad \text{mit} \quad |\Psi_i\rangle \in \mathcal{H}_i. \quad (2.28)$$

Alternativ kann man auch von einem allgemeinen Gesamtzustand der Form (2.11),

$$|\Psi\rangle = \sum_{a_1, \dots, a_N} c_{a_1, a_2, \dots, a_N} |\phi_{a_1}^{(1)}\rangle |\phi_{a_2}^{(2)}\rangle \cdots |\phi_{a_N}^{(N)}\rangle,$$

ausgehen, wobei $|\phi_{a_j}^{(j)}\rangle$ der a_j -te Basisvektor aus \mathcal{H}_j ist. Dieser Zustand ist genau dann separabel, wenn für die Entwicklungskoeffizienten

$$c_{a_1, a_2, \dots, a_N} = c_{a_1} \cdot c_{a_2} \cdots c_{a_N} \quad (2.29)$$

gilt. Separabilität impliziert rein klassische Korrelationen in dem Sinne, dass der Gesamtzustand genau die Informationen enthält, welche durch die einzelnen Parteien beigetragen werden - d.h. eine (lokale) Messung an einem der Teilsysteme beeinflusst die Anderen nicht. Ist ein Zustand nicht separabel, so wird er als verschränkt (engl. 'entangled') be-

zeichnet, d.h. es gilt

$$c_{a_1, a_2, \dots, a_N} \neq c_{a_1} \cdot c_{a_2} \cdots c_{a_N}. \quad (2.30)$$

Die Information ist nun nicht mehr an die einzelnen Konstituenten 'angeheftet', sondern delokalisiert zwischen ihnen verteilt. Eine projektive Messung an einer Partei führt zu einer Zustandsreduktion des gesamten Systems. Gemäß der Definition (2.28) kann Verschränkung sowohl in Vielteilchensystemen als auch zwischen verschiedenen Freiheitsgraden auftreten.

Wie eingangs bereits erwähnt ist eine Klasse von nicht-separablen Zuständen hierbei von besonderem Interesse - die sog. maximal verschränkten Zustände. Diese sind für zwei gleichartige und -dimensionierte Hilberträume nach [Wol08] definiert als

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |\phi_i^{(1)}\rangle |\phi_i^{(2)}\rangle.$$

Dabei sind $\{|\phi_i^{(1)}\rangle\}$ bzw. $\{|\phi_i^{(2)}\rangle\}$ zwei beliebige Basen der Teilräume. Für Zwei-Qubit-Systeme der Gestalt (2.10) ergeben sich insbesondere die vier Bell-Zustände⁶,

$$|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle |b\rangle \pm |V\rangle |a\rangle), \quad |\Phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle |a\rangle \pm |V\rangle |b\rangle), \quad (2.31)$$

mit den zugehörigen Dichtematrizen:

$$\hat{\rho}_{\Psi_{\pm}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & \pm 0.5 & 0 \\ 0 & \pm 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\rho}_{\Phi_{\pm}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & \pm 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Eine solche Verschränkung zwischen zwei Freiheitsgraden eines einzelnen Teilchens wird auch als 'Hyperentanglement' bezeichnet.

Die Bell-Zustände weisen einige Besonderheiten auf. Zunächst fällt auf, dass jeder Zustand mit Hilfe einer unitären Transformation (bis auf globale Phasen) in alle anderen Bell-Zustände übergeführt werden kann [Kie07]. Zum Beispiel ist

$$|\Psi_{-}\rangle = (\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_2) |\Phi_{+}\rangle.$$

Das bedeutet einerseits, dass Verschränkung unter Basiswechsel erhalten bleibt, und andererseits, dass jegliche Qubit-Operation stets den gesamten Systemzustand beeinflusst. Letzteres ist für separable Zustände offensichtlich nicht der Fall.

Eine weitere Eigenart tritt in Erscheinung, wenn man die in (2.22) definierte partielle Spur auf einem der Teilräume bildet. Dann folgt beispielsweise für den $|\Phi_{+}\rangle$ -Zustand

⁶Der $|\Phi_{\pm}\rangle$ -Zustand stellt einen Spezialfall der GHZ (Greenberger-Horner-Zeilinger)- bzw. 'Schrödinger-Cat'-Zustände für N Qubits dar: $|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle^{\otimes N} + |V\rangle^{\otimes N})$.

(2.31):

$$\hat{\rho}_s = \text{tr}_o(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|) = \frac{1}{2}(|H\rangle\langle H| + |V\rangle\langle V|) = \hat{\rho}_{wr,s}, \quad (2.33)$$

$$\hat{\rho}_o = \text{tr}_s(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|) = \frac{1}{2}(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|) = \hat{\rho}_{wr,o}. \quad (2.34)$$

Ohne die Kenntnis über das jeweils andere Qubit verhalten sich die Systeme unter lokalen Messungen wie weißes Rauschen, d.h. die Parteien sind so nicht unterscheidbar.

Globale Messungen am gesamten System führen stets zu einer Zustandsreduktion beider Qubits. Die Bell-Zustände weisen diesbezüglich außerdem eine starke (Anti-) Korrelation in verschiedenen Messbasen auf. Zum Beispiel gilt für $|\Phi\rangle_+$ in der $\hat{\sigma}_1$ -Basis:

$$|\Phi\rangle_+ = \frac{1}{2}(|H\rangle|a\rangle + |V\rangle|b\rangle) = \frac{1}{2}(|+\rangle|+\rangle + |-\rangle|-\rangle).$$

Das heißt, eine gemeinsame Messung der Form $\hat{\sigma}_1 \otimes \hat{\sigma}_1$ projiziert entweder in den Eigenzustand $|+\rangle|+\rangle$ mit dem Eigenwert $+1$ oder in $|-\rangle|-\rangle$ mit dem Wert -1 . Andere Ergebnisse, wie sie etwa für den separablen Zustand

$$|H\rangle|b\rangle = \frac{1}{2}(|+\rangle|+\rangle - |-\rangle|-\rangle + |+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle)$$

zu erwarten wären, treten nicht auf [Kie07].

2.2.2 Verschränkung in Ensembles

Die formale Definition der Verschränkung in gemischten Zuständen gestaltet sich zunächst problematisch, da Separabilität und die Tatsache, dass ein Zustand als Tensorprodukt geschrieben werden kann, nicht mehr äquivalent sind. Letzteres bedeutet, dass für ein zusammengesetztes System $\hat{\rho} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N)$ gilt [Wol08, GT09]:

$$\hat{\rho} = \bigotimes_{i=1}^N \hat{\rho}^{(i)}, \quad \hat{\rho}^{(i)} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_i). \quad (2.35)$$

Eine Definition der Separabilität wurde 1989 von R.F. Werner [Wer89] vorgeschlagen und besagt, dass für die Gesamtdichtematrix eine konvexe Zerlegung in Produktzustände der Form (2.35) existieren muss:

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j \bigotimes_{i=1}^N \hat{\rho}_j^{(i)} \quad \text{mit} \quad \hat{\rho}_j^{(i)} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_i), \quad (2.36)$$

wobei $\sum_j p_j = 1$. Diese Situation korrespondiert mit dem klassischen Fall, da die Korrelationen zwischen den einzelnen Parteien lediglich durch die unvollständige Information über den Gesamtzustand bedingt sind. Verschränkung in Gemischen liegt genau dann vor, falls keine konvexe Zerlegung der Gestalt (2.36) möglich ist. Diese Definition ist jedoch keinesfalls konstruktiv und in der Regel ist es ein nicht-triviales Problem zu entscheiden, ob ein gegebener gemischter Zustand separabel ist oder nicht. Bis heute gibt es hierfür keine allgemeine Lösungsmethode. Es wurden zwar diverse Techniken in Form der Verschränkungsmaße und -witnesses entwickelt, diese sind jedoch oftmals auf eine

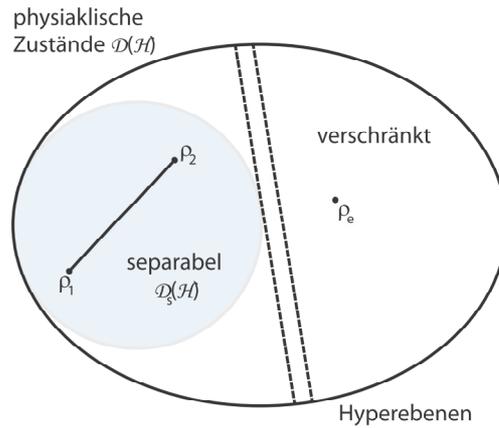


Abbildung 2.2: Anschauliche Darstellung der geometrischen Struktur des konvexen Zustandsraumes der (physikalischen) Dichtematrizen $\mathcal{D}(\mathcal{H})$. $\mathcal{D}_s(\mathcal{H})$ ist die Teilmenge der separablen Zustände. ρ_e bezeichnet einen verschränkten und $\rho_{1,2}$ zwei nicht-verschränkte Zustände.

bestimmte Anzahl an Qubits und eine begrenzte Auswahl an Zuständen beschränkt.

2.2.3 Verschränkungsmaße

Die Konstruktion derartiger Hilfsmittel zum Nachweis von Verschränkung ist aufgrund der geometrischen Gestalt des zugrundeliegenden Zustandsraumes $\mathcal{D}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong \mathbb{C}^{n \times n}$ möglich [Wol08]. $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ bezeichnet wieder den Raum aller positiven Operatoren mit Spur 1 über \mathcal{H} , d.h. alle physikalischen Dichtematrizen. Diese Menge ist, streng genommen, kein Untervektorraum mehr und liegt darüber hinaus konvex in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.⁷ Entscheidend ist nun, dass die Teilmenge aller separablen Zustände $\mathcal{D}_s(\mathcal{H}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{H})$ ebenfalls konvex ist⁸, d.h. für zwei nicht-verschränkte Zustände $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2$ liegt die 'Verbindungsline' zwischen ihnen auch in der Menge der separablen Zustände:

$$\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2 \text{ sep.} \iff \lambda \hat{\rho}_1 + (1 - \lambda) \hat{\rho}_2 \text{ sep. für alle } 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (2.37)$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass solche Dichtematrizen stets die Gestalt (2.36) haben und deshalb jede Konvexkombination der Form (2.37) mit Gewichten λ bzw. $(1 - \lambda)$ lediglich einer klassischen Mischung zweier separabler Zustände entspricht [Min04]. Eine anschauliche Darstellung dieses Sachverhalts ist in Abbildung 2.2 gegeben.

Aufgrund der Konvexität von $\mathcal{D}_s(\mathcal{H})$ berühren alle tangentialen Hyperebenen diese Teilmenge nur in einem Randpunkt. Das bedeutet, dass es für jeden verschränkten Zustand mindestens eine Hyperebene gibt, die ihn von den separablen Zuständen trennt. Es ist daher, zumindest prinzipiell, möglich, jeden verschränkten Zustand durch seine relative Lage zu dieser Trennebene als nicht-separabel nachzuweisen. Die theoretische und experimentelle Realisierung solch einer 'Trennung' kann für höherdimensionale Systeme durchaus kompliziert sein, für zwei Qubits gibt es jedoch eine Vielzahl handlicher Kriterien, wie zum Beispiel das Peres-Horodecki- bzw. PPT-Kriterium.

⁷ $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ ist kein Untervektorraum, denn Linearkombinationen der Form $a\hat{\rho}_1 + b\hat{\rho}_2$ mit $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ liegen nur dann wieder in $\mathcal{D}(\mathcal{H})$, falls $\text{tr}(a\hat{\rho}_1 + b\hat{\rho}_2) = a + b = 1$ und $a, b \geq 0$.

⁸Die reinen Produktzustände entsprechen den Randpunkten der Menge aller separablen Zustände.

Positive Abbildungen und PPT-Kriterium

In gewissen Quantensystemen lässt sich Verschränkung mit linearen positiven Abbildungen $\hat{\Lambda}$,

$$\hat{\Lambda} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad \text{pos.} \quad \iff \quad \hat{\Lambda}(\hat{\rho}) \geq 0 \quad \forall \mathcal{B}(\mathcal{H}) \ni \hat{\rho} \geq 0,^9$$

nachweisen [Wol08, Min04]. Für das Zweiparteiensystem $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_o$ sei $\hat{\Lambda}_s : \mathcal{H}_s \rightarrow \mathcal{H}_s$ solch eine Abbildung des Polarisationshilbertraumes auf sich selbst. Ausschlaggebend ist nun, dass eine triviale Erweiterung auf $\hat{\Lambda}_{s,o} = \hat{\Lambda}_s \otimes \hat{1}_o$ nicht notwendigerweise wieder positiv ist, d.h. es können nun negative Eigenwerte auftreten. Ist dies der Fall, so kann eine derart erweiterte Funktion zur Detektion von Verschränkung verwendet werden.

Es sei $\hat{\rho} \in \mathcal{D}_s(\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_o)$ ein beliebiger separabler Zustand, dann ist wegen (2.36):

$$\hat{\Lambda}_{s,o}(\hat{\rho}) = (\hat{\Lambda}_s \otimes \hat{1}_o)\hat{\rho} = \sum_j p_j \left(\hat{\Lambda}_s \hat{\rho}_j^{(s)} \right) \otimes \hat{\rho}_j^{(o)}.$$

Da $\hat{\Lambda}_s$ als positiv vorausgesetzt war, muss die obige Bildung für sämtliche separablen Dichtematrizen auch wieder positiv sein, d.h. $\hat{\Lambda}_{s,o}(\hat{\rho}) \geq 0 \forall \hat{\rho} \in \mathcal{D}_s(\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_o)$. Tritt hingegen der Fall $\hat{\Lambda}_{s,o}(\hat{\rho}) < 0$ ein, so muss der Zustand verschränkt gewesen sein.¹⁰

Ein wichtiges Beispiel für eine solche Abbildung ist die von A. Peres [Per96] bzw. Horodecki et al. [HH99] eingeführte partielle Transponierte (engl. 'positive partial transpose' - kurz: 'PPT'):

$$(\hat{T}_s \otimes \hat{1}_o)\hat{\rho} =: \hat{\rho}^{T_s} \quad \text{oder} \quad (\hat{1}_s \otimes \hat{T}_o)\hat{\rho} =: \hat{\rho}^{T_o}. \quad (2.38)$$

Für einen gemischten Zustand $\hat{\rho} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_o)$,

$$\hat{\rho} = \sum_{i,j} \sum_{k,l} \rho_{ij,kl} |\phi_i^s\rangle \langle \phi_j^s| \otimes |\phi_k^o\rangle \langle \phi_l^o|,$$

ist die partielle Transponierte auf \mathcal{H}_s gegeben durch [GT09]:

$$\hat{\rho}^{T_s} = \sum_{i,j} \sum_{k,l} \rho_{ji,kl} |\phi_i^s\rangle \langle \phi_j^s| \otimes |\phi_k^o\rangle \langle \phi_l^o|. \quad (2.39)$$

Dabei sind $\{\phi_i^s\}$ bzw. $\{\phi_l^o\}$ zwei beliebigen Basen. Die konkrete Gestalt der PPT hängt offensichtlich von der jeweils gewählten Darstellung der Dichtematrix ab, das Eigenwert-Spektrum ist jedoch unabhängig davon. Hat die resultierende Abbildung $\hat{\rho}^{T_s}$ oder $\hat{\rho}^{T_o}$ also mindestens einen negativen Eigenwert, so war der ursprüngliche Zustand $\hat{\rho}$ verschränkt (Peres-Horodecki-Kriterium).

Dieses Kriterium gilt allerdings nur für 2×2 (zwei Qubits) bzw. 2×3 (ein Qubit und ein Qutrit)-Systeme (Horodecki-Theorem), da im höherdimensionalen Fall auch nicht-separable Zustände auftreten können, deren PPTs positiv sind. Innerhalb seines Gültigkeitsbereiches ist es jedoch ein sehr einfaches und handliches Mittel, um Verschränkung in einem gemischten Zustand nachzuweisen.

⁹Die Schreibweise $\hat{\rho} \geq 0$ steht abkürzend für $\langle \Psi | \hat{\rho} | \Psi \rangle \geq 0 \forall | \Psi \rangle \in \mathcal{H}$.

¹⁰Umgekehrt gilt diese Aussage jedoch nicht. Bleibt ein Zustand unter Anwendung der erweiterten Abbildung positiv heißt das noch nicht, dass er auch separabel ist.

Verschränkungsmonotone

Das Vorzeichen der PPT-Eigenwerte gibt zwar Auskunft darüber, ob ein Zustand separabel ist oder nicht, quantifiziert die etwaige Verschränkung allerdings nicht. Diese Aufgabe kann mit anderen Funktionen erfüllt werden; ein sehr prominentes Beispiel ist hierbei die Verletzung der Bellschen Ungleichungen. Zur Definition solcher Abbildungen ist es möglich, die Eignung von Zuständen für bestimmte Anwendungen heranzuziehen (zum Beispiel Teleportation) [Kie07]. Da die so definierten Größen E oftmals nur für bestimmte Systeme und Zustände verlässliche Aussagen liefern, gibt es bereits eine Vielzahl an verschiedensten Maßen zur Charakterisierung von Verschränkung. Zur Vereinheitlichung fordert man von ihnen üblicherweise die folgenden Eigenschaften [HHH00, VP98, PV07, GT09]:

1. $E(\hat{\rho}) = 0$, falls $\hat{\rho}$ separabel ist.
2. Da Verschränkung nicht durch lokale Operationen und klassische Kommunikation erzeugt werden kann, darf $E(\hat{\rho})$ durch solche Transformationen nicht vergrößert werden.
3. Konvexität, d.h. der Grad an Verschränkung wird durch inkohärentes Mischen von Zuständen (also Verlust von Information) verringert.

Genügt ein Maß diesen Konditionen, so wird es als Verschränkungs-Monoton bezeichnet [Vid00]. Oftmals weisen derartige Größen jedoch nur einen Teil der obigen Eigenschaften auf, was ihre Eignung als Verschränkungsmaße entsprechend begrenzen kann.

Logarithmische Negativität

Das PPT-Kriterium kann zur Ableitung der sog. Negativität (engl 'negativity') verwendet werden, die wie folgt definiert ist:

$$N(\hat{\rho}) := \frac{1}{2} \left(\|\hat{\rho}^{T_s}\| - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^4 \|\lambda_i^{T_s}\| - 1 \right). \quad (2.40)$$

$\hat{\rho}^{T_s}$ ist die partielle Transponierte von $\hat{\rho} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_o)$ auf \mathcal{H}_s gemäß Definition (2.39) mit den vier Eigenwerten $\lambda_i^{T_s}$. Es handelt sich hierbei um ein konvexes, nicht-additives Monoton, das den Anteil an negativen Eigenwerten im Spektrum der partiellen Transponierten angibt und im selben Gültigkeitsbereich Verschränkung quantifizieren kann [VW02, GT09].

Für den Bell-Zustand $|\Phi_+\rangle$ aus (2.31) ergibt sich beispielsweise eine Negativität von $N = 0.5$ und für separable Zustände generell $N = 0$.

Aus N kann auch noch ein weiteres Verschränkungsmaß konstruiert werden, die sog. logarithmische Negativität, welche zusätzlich normiert und additiv ist [PV07]:

$$N_l(\hat{\rho}) := \log_2 \|\hat{\rho}^{T_s}\| = \log_2 \left(\sum_{i=1}^4 \|\lambda_i^{T_s}\| \right). \quad (2.41)$$

Für den $|\Phi_+\rangle$ -Zustand ergibt sie sich zu $N = 1$ und im separablen Fall zu $N = 0$.

Concurrence und Entanglement of Formation

Ein weiteres Verschränkungsmaß für zwei Qubits ist das 'Entanglement of Formation' (kurz: 'EoF'), welches wie folgt definiert ist [PV07, GT09]:

$$E_f(\hat{\rho}) := \inf_{p_k, \Psi_k} \left\{ \sum_k p_k S[(\hat{\rho}_s)_k] : \hat{\rho} = \sum_k p_k |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k| \right\}. \quad (2.42)$$

Dabei bezeichnen S die von Neumann Entropie und $\hat{\rho}_s$ die auf den Polarisationszustandsraum \mathcal{H}_s reduzierte Dichtematrix. Das Infimum wird dabei über alle Darstellungen von $\hat{\rho}$ gebildet. Das EoF kann, grob ausgedrückt, als diejenige Menge an Information interpretiert werden, die nötig ist, um einen bestimmten Zustand zu erzeugen [Woo98, BBPS96].

Die Definition (2.42) ist ein Variationsproblem und für komplexe Quantensysteme ohne spezielle Symmetrien im Allgemeinen sehr schwierig zu lösen. Für zwei Qubits gelang es jedoch Wootters et al [Woo98], eine analytische Formel zur Berechnung herzuleiten. Sie konnten zeigen, dass es eine Beziehung zwischen E_f und der sog. 'Spinflip'-Symmetrie eines Zustandes gibt. Dazu führt man eine Hilfsgröße, die sog. Concurrence C , ein, welche für einen reinen Zustand $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_o$ definiert ist als [GT09]:

$$C(|\Psi\rangle) := \sqrt{2(1 - \text{tr } \hat{\rho}_s^2)}.$$

Diese Größe kann auf gemischte Zustände $\hat{\rho} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_o)$ folgendermaßen erweitert,

$$C(\hat{\rho}) := \inf_{p_k, \Psi_k} \left\{ \sum_k p_k C(|\Psi_k\rangle) : \hat{\rho} = \sum_k p_k |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k| \right\}, \quad (2.43)$$

und analytisch berechnet werden:

$$C(\hat{\rho}) = \max \{0, \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} - \sqrt{r_3} - \sqrt{r_4}\}. \quad (2.44)$$

Dabei sind $\{r_i\}$ die Eigenwerte der nicht-hermiteschen Matrix $\hat{R} = \hat{\rho} \hat{\Sigma} \hat{\rho}^T \hat{\Sigma}$ in abnehmender Reihenfolge [JKMW01]. Man bezeichnet

$$\hat{\Sigma} = \hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{|H,a\rangle, |H,b\rangle, |V,a\rangle, |V,b\rangle}$$

als die sog. 'Spin-Flip'-Matrix. Es lässt sich nun zeigen, dass das Entanglement of Formation mit Hilfe von (2.44) gemäß

$$E_f(\hat{\rho}) = h \left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2(\hat{\rho})}}{2} \right) \quad (2.45)$$

berechnet werden kann. Es ist hierbei $h(x) = -x \log(x) - (1-x) \log(1-x)$ die binäre Entropie-Funktion.

Die ursprünglich als Hilfsgröße eingeführte Concurrence ist wegen ihrer Korrelation mit dem EoF selbst ein unabhängiges Verschränkungsmaß, das auch im experimentellen Teil dieser Arbeit Anwendung finden wird. Es ergibt sich beispielsweise für den Zustand

$|\Phi_+\rangle$ eine Concurrence und Entanglement of Formation von 1, während ein separabler Zustand eine Concurrence von 0 und ein nicht definiertes E_f hat.

Obwohl die bisher eingeführten Größen das Problem des Nachweises von Verschränkung recht gut zu lösen scheinen, weisen sie neben ihrer Limitierung auf zwei Qubits einen weiteren Nachteil auf: Durch die sehr unterschiedlichen Definitionen skalieren sie auch völlig anders, d.h. ein (aus experimentellen Daten rekonstruierter) Zustand enthält je nach dem, welches Maß verwendet wird, unterschiedlich viel Verschränkung [EP99].

2.3 Quantenzustands-Tomographie

2.3.1 Lineare Rekonstruktion der Dichtematrix

Die Einschätzung der Funktionalität des Versuchsaufbaus im Rahmen der Verschränkungsmaße erfordert die Kenntnis der zugrundeliegenden Dichtematrix. Wie unten anhand von zwei Qubit-Systemen demonstriert wird, kann Letztere aus einem Satz von gewissen Projektionsmessungen vollständig rekonstruiert werden. Diese Methode weist jedoch einige Nachteile hinsichtlich ihrer Anfälligkeit gegenüber statistischen Schwankungen der Detektorzählraten und Ungenauigkeiten im Experiment auf. So ergeben sich insbesondere für Zustände geringer Entropie (also stark verschränkt) oftmals unphysikalische Dichtematrizen als Ergebnisse [JKMW01]. Dieses Problem kann jedoch mit numerischen Optimierungsmethoden umgangen werden.

Nach (2.11) ist die allgemeinste Dichtematrix eines Zwei-Qubit-Systemes $\mathcal{D}(\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_o)$ gegeben durch

$$\hat{\rho} = \begin{array}{c} \langle Ha| \\ \langle Hb| \\ \langle Va| \\ \langle Vb| \end{array} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix}.$$

Die Matrixelemente enthalten dabei sämtliche Phasenfaktoren und Wahrscheinlichkeitsgewichte der beteiligten reinen Zustände. Genau wie eine allgemeine Ein-Qubit Observable (2.15), kann auch $\hat{\rho}$ in eine Linearkombination von 16 Basis-Matrizen $\hat{\sigma}_{i_1} \otimes \hat{\sigma}_{i_2}$ entwickelt werden [BZ06]:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} \sum_{i_1, i_2=0}^3 r_{i_1, i_2} \hat{\sigma}_{i_1} \otimes \hat{\sigma}_{i_2}. \quad (2.46)$$

Durch Skalarprodukt-Bildung erhält man die zugehörigen Koeffizienten:

$$r_{i_1, i_2} = \text{tr}[(\hat{\sigma}_{i_1} \otimes \hat{\sigma}_{i_2}) \hat{\rho}] = \langle \hat{\sigma}_{i_1} \otimes \hat{\sigma}_{i_2} \rangle_{\rho}. \quad (2.47)$$

Eine gängige Wahl für die Basis sind die Pauli-Matrizen (2.12). Die 16 unbekannt Parameter entsprechen dann jeweils den Erwartungswerten von simultanen Projektionsmessungen in H/V bzw. (a/b), +/- bzw. R/L-Basis an beiden Qubits und können daher aus experimentellen Daten bestimmt werden. Die Mittelwerte berechnen sich dabei aus

ν	$ \Psi_\nu\rangle \langle\Psi_\nu $						
1	H a	5	R a	9	+ R	13	V +
2	H b	6	R b	10	+ +	14	V L
3	V b	7	+ b	11	R +	15	H L
4	V a	8	+ a	12	H +	16	R L

Tabelle 2.1: Tomographisch vollständiger Satz von (simultanen) Projektionsmessungen an beiden Qubits. Die Buchstaben/Zeichen repräsentieren die jeweilige Messbasis.

den Detektionswahrscheinlichkeiten gemäß [PR04]:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_0 \otimes \hat{\sigma}_0 \rangle_\rho &= P_{H,a} + P_{H,b} + P_{V,a} + P_{V,b}, \\ \langle \hat{\sigma}_1 \otimes \hat{\sigma}_3 \rangle_\rho &= P_{+,a} - P_{+,b} - P_{-,a} + P_{-,b}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Im Experiment werden allerdings wegen der endlichen Anzahl an Messungen keine Wahrscheinlichkeiten bestimmt, sondern relative Häufigkeiten. Die Rekonstruktion der Dichtematrix mithilfe des hier beschriebenen Formalismus stellt in diesem Sinne nur eine Näherung dar.

Es hat den Anschein, als müssten für eine vollständige Tomographie die Zählraten von insgesamt 16×4 Projektoren \hat{P}_{i_1, i_2} ermittelt werden. Diese lassen sich jedoch wegen der Normierung,

$$1 \stackrel{!}{=} \text{tr } \hat{\rho} = \frac{1}{4} \sum_{i_1, i_2=0}^3 r_{i_1, i_2} \text{tr}(\hat{\sigma}_{i_1}) \text{tr}(\hat{\sigma}_{i_2}) = r_{0,0},$$

auf 16 relevante Messungen \hat{P}_ν ($\nu = 1, \dots, 16$) reduzieren (s. Tab. 2.1). Es ist hierbei zu beachten, dass damit etwaige zeitliche Intensitätsdrifts im Versuchsaufbau nun nicht mehr berücksichtigt werden!

Zur weiteren Vereinfachung der Auswertung kann (2.46) durch die jeweiligen Einzelzählraten n_ν ausgedrückt werden. Da die Diagonalelemente der Dichtematrix die Detektionswahrscheinlichkeiten bzgl. des zugrundeliegenden Projektors $\hat{P}_\nu = |\Psi_\nu\rangle \langle\Psi_\nu|$ angeben, muss

$$P_\nu = \frac{n_\nu}{N} = \langle \Psi_\nu | \hat{\rho} | \Psi_\nu \rangle \quad (2.48)$$

gelten. N ist dabei eine Normierungskonstante, welche die absoluten Häufigkeiten in Form der Zählraten näherungsweise in Wahrscheinlichkeiten umrechnet und darüber hinaus die Effizienz des Detektors mit berücksichtigt. Sie ergibt sich aus den ersten vier Messungen zu

$$N = \langle \hat{\sigma}_0 \otimes \hat{\sigma}_0 \rangle_\rho = \sum_{\nu=1}^4 n_\nu. \quad (2.49)$$

Damit kann die Dichtematrix in Abhängigkeit von den Zählraten ausgedrückt werden. Die Details zur Herleitung sowie die in diesem Zusammenhang konstruierten \hat{M} -Matrizen entnimmt man [JKMW01]. Schlussendlich ergibt sich die wichtige Beziehung:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{16} \hat{M}_\nu n_\nu. \quad (2.50)$$

2.3.2 Maximum-Likelihood-Methode und Fehleranalyse

Wie bereits eingangs erwähnt, kann die oben beschriebene Zustandstomographie zu nicht-physikalischen Dichtematrizen führen. Um dieses Problem zu umgehen, kann der tatsächliche Zustand anhand der Messergebnisse mithilfe von numerischen Methoden abgeschätzt werden. Dazu definiert man zunächst eine physikalische Dichtematrix $\hat{\rho}_p$ gemäß (2.19), und stellt sie unter Zuhilfenahme der Cholesky-Zerlegung als

$$\hat{\rho}_p = \frac{\hat{T}^\dagger \hat{T}}{\text{tr}(\hat{T}^\dagger \hat{T})} \quad (2.51)$$

dar [JKMW01]. Der Nenner dient dabei lediglich der Normierung. Die \hat{T} -Matrix ist dabei gegeben durch:¹¹

$$\hat{T}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ t_5 + it_6 & t_2 & 0 & 0 \\ t_{11} + it_{12} & t_7 + it_8 & t_3 & 0 \\ t_{15} + it_{16} & t_{13} + it_{14} & t_9 + it_{10} & t_4 \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Im Experiment werden die 16 Zählraten $n_\nu = N \langle \Psi_\nu | \hat{\rho} | \Psi_\nu \rangle$ ermittelt, welche jeweils um einen Mittelwert \bar{n}_ν Poisson-verteilt sind. Die oben definierte Matrix $\hat{\rho}_p$ soll nun an diese experimentellen Daten angefitet werden, sodass für die aus ihr hervorgehenden Zählraten gilt, dass

$$\bar{n}_\nu = N \langle \Psi_\nu | \hat{\rho}_p(\mathbf{t}) | \Psi_\nu \rangle. \quad (2.53)$$

Da eine Poisson-Verteilung angenommen wird, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, *einen* bestimmten Satz an Zählraten zu messen, gegeben durch:

$$P(n_1, \dots, n_{16}) = \frac{1}{N_{norm}} \prod_{\nu=1}^{16} \exp \left[-\frac{(n_\nu - \bar{n}_\nu)^2}{2\bar{n}_\nu} \right],$$

wobei N_{norm} eine weitere Normierungskonstante ist. Mit (2.53) ergibt sich ferner:

$$P(n_1, \dots, n_{16}) = \frac{1}{N_{norm}} \prod_{\nu=1}^{16} \exp \left[-\frac{(n_\nu - N \langle \Psi_\nu | \hat{\rho}_p(\mathbf{t}) | \Psi_\nu \rangle)^2}{2N \langle \Psi_\nu | \hat{\rho}_p(\mathbf{t}) | \Psi_\nu \rangle} \right].$$

Die Parameter t_1, \dots, t_{16} müssen nun so gewählt werden, dass die obige Funktion maximal wird. Alternativ lässt sich jedoch auch das mathematisch äquivalente Minimum der sog. 'Likelihoodfunktion' L bestimmen [PR04]:

$$L(n_1, \dots, n_{16}) = \frac{1}{N_{norm}} \sum_{\nu=1}^{16} \exp \left[\frac{(n_\nu - N \langle \Psi_\nu | \hat{\rho}_p(\mathbf{t}) | \Psi_\nu \rangle)^2}{2N \langle \Psi_\nu | \hat{\rho}_p(\mathbf{t}) | \Psi_\nu \rangle} \right]. \quad (2.54)$$

Monte-Carlo-Simulation

Die Maximum-Likelihood-Abschätzung dient im Wesentlichen zur Kompensation der Fehler, welche durch die endliche Dauer der Messungen, also durch eine fehlerhafte Zähl-

¹¹Jede positiv semi-definite Matrix kann in diese Form gebracht werden. Die spezielle Wahl der Dreiecksmatrix für \hat{T} bedingt eine Reduzierung der Fitparameter.

statistik, bedingt sind. Es treten jedoch noch zwei weitere Fehlerquellen auf: Zum einen kann ungenaues Einstellen der Messbasen zu falschen Zählraten führen und zum anderen wirkt sich die Stabilität des Versuchsaufbaus auf die gemessenen Intensitäten aus (vgl. Abschnitt 3.2.1). Driften diese mit der Zeit, so können dadurch ebenfalls falsche Ergebnisse entstehen, wobei das Verhältnis aus Messdauer und Zeitskala der Drifts entscheidend für die Tragweite der resultierenden Fehler ist.

Die konkrete Berechnung der beteiligten Fehler kann auf analytische und numerische Weise erfolgen, wobei Letztere nach [PR04] in der Regel zu sinnvolleren Ergebnissen führt. Es wird dabei für jede Fehlerquelle eine entsprechende statistische Verteilung angenommen (zum Beispiel Poisson für Zählstatistik und Gauß für fehlerhafte Einstellung der Messbasis) und aus den 16 experimentell ermittelten Zählraten beliebig viele Sätze von numerisch generierten Ergebnissen gewürfelt (Monte-Carlo-Simulation). Daraus lassen sich mithilfe der Maximum-Likelihood-Abschätzung die zugehörigen Dichtematrizen, und damit alle relevanten Größen, wie etwa die Concurrence, und deren Standardabweichungen berechnen. Die jeweiligen Mittelwerte sind dabei durch die ursprünglich auf experimentellem Wege ermittelte, und anschließend gefittete, Dichtematrix festgelegt.

3 Experimentelle Realisierung des Bell-Zustandes

Das Ziel dieser Arbeit ist die experimentelle Erzeugung eines GHZ-Zustandes der Form

$$|\Psi\rangle = \alpha |H\rangle |a\rangle + \beta |V\rangle |b\rangle$$

mithilfe eines Sagnac-Interferometers. Diese spezielle Wahl des Aufbaus orientiert sich bis auf einige Modifikationen am Konzept von [GLY⁺]. Die Zielsetzung besteht in der Realisierung eines möglichst effizienten, langzeitstabilen und vor allem einfachen Interferometers, weshalb der ursprüngliche Vorschlag von Gao et al. bzgl. der Wahl an verwendeten Komponenten leicht abgeändert wird. Zum einen werden zwei der insgesamt drei Spiegel durch ein Reflektionsprisma ersetzt, wodurch die Stabilität des Aufbaus erhöht werden soll und zum anderen wird anstatt der komplexeren Kombination aus normalem und polarisierenden Strahlteiler ein einziger polarisierender Strahlleiterwürfel sowie zwei Halbwellenplättchen verwendet.

In diesem Kapitel wird die konkrete Gestalt des Interferometers sowie dessen Justage und Charakterisierung mit Hinblick auf die Visibility, Stabilität und Effizienz beschrieben. Die Zustandstomographie zur Überprüfung der Qualität des erzeugten Zustandes und ihre Ergebnisse werden im letzten Teil dargelegt.

3.1 Beschreibung und Justage des verwendeten Aufbaus

3.1.1 Darstellung der Versuchsanordnung

Eine schematische Skizze des Interferometers mit den relevanten Abkürzungen ist in Abbildung 3.1 gegeben. Aufnahmen des tatsächlichen Versuchsaufbaus entnimmt man den Abbildungen 3.2a bzw. 3.2b.

Ein mit Filtern abgeschwächter CW-Dioden-Laser der Wellenlänge 806nm wird in eine Singlemode-Faser eingekoppelt und nach der Passage durch einen Polarisationsregler (Polr)¹ in das Interferometer kollimiert ausgekoppelt. Der Strahl trifft dann zunächst auf einen Plus-Polarisator (+Pol) und daran anschließend (nicht-zentral) auf einen Polarisationsstrahlteiler (PBS1, 2 × 2 × 2 cm), der den horizontal polarisierten Anteil des Lichts in den Arm a transmittiert und den vertikalen Anteil in den dazu senkrechten Arm b reflektiert. Wegen der geometrischen Gestalt des Aufbaus ist der Abstand zwischen den Moden a und b im Interferometer (hier: 1cm) dadurch festgelegt, wo der Laser anfangs auf den PBS1 trifft. Die a-Mode durchläuft nun ein Glasplättchen (Gl) der Dicke 0.1mm und wird danach in einem Prisma (Pr, 5.5 × 4 × 4 cm) durch Totalreflektion in den oberen Bereich des Interferometers umgelenkt. Es folgen zwei Halbwellenplättchen (22.5°, 45°) sowie die anschließende Reflektion an einem Spiegel (Sp1), der die Mode wieder

¹Dieser besteht aus drei Plättchen, wobei die Glasfaser in den beiden Äußeren einfach gewickelt und im zentralen Plättchen zweifach gewickelt ist. Durch die Torsion der Faser kann nun Doppelbrechung auftreten und die Ausgangspolarisation daher durch Drehen der Plättchen geregelt werden.

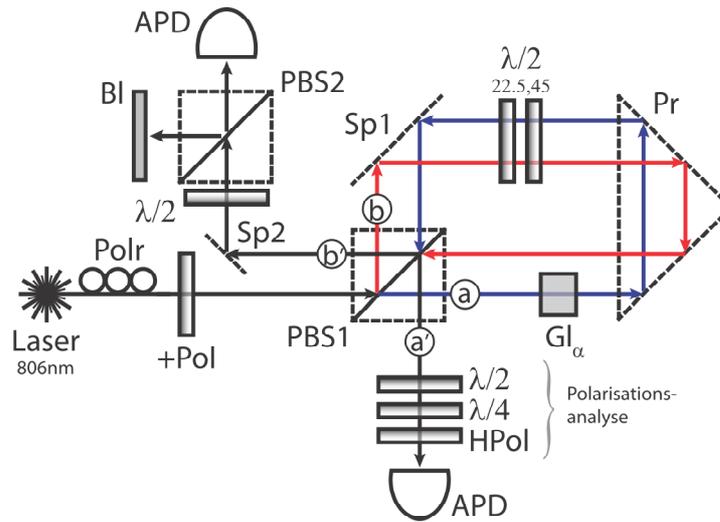


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der Versuchsanordnung. Polr: Polarisationsregler, Pol: Polarisator, PBS: Polarisationsstrahlteiler (engl. 'polarizing beam splitter'), Sp: Spiegel, Pr: Reflektionsprisma, Gl: Glasplättchen, APD: 'Avalanche-Photodiode'-Detektor

auf den Strahlteilerwürfel (PBS1) richtet. Das Glasplättchen ist an die Unterseite eines computer-gesteuerten Motors geklebt, der von oben in den Strahlengang hineinragt.

Die Mode b durchquert die Komponenten, bis auf das Glasplättchen, genau in der umgekehrten Reihenfolge. Durch die Geometrie der Anordnung treffen sich beiden Moden wieder am selben Punkt im PBS1. Da der Laser den Strahlteiler anfänglich nicht-zentral durchquert, entsteht insgesamt ein transversaler Versatz zwischen dem Licht-Input und den zurücklaufenden Strahlen.

Die beiden $\lambda/2$ -Plättchen drehen die Strahlen a und b auf diagonale bzw. antidiagonale Polarisation. Es entstehen dadurch nach dem zweiten Durchgang durch den PBS1 zwei miteinander verschränkte Output-Moden a' und b', die den polarisierenden Strahlteiler unter einem rechten Winkel zueinander verlassen. Erstere durchläuft nun die Polarisationsanalyse bestehend aus einem $\lambda/4$ - und $\lambda/2$ -Plättchen sowie einem Horizontal-Polarisator (HPol). Daran anschließend folgt ein Einkoppler (mit verstellbarer Linse), der a' in eine Singlemodefaser überführt, welche an einen passiv gequenchten Avalanche-Photodiode-Detektor (kurz: APD) angeschlossen ist.

Die Mode b' wird an einem kleinen Spiegel (Sp2) vor dem Plus-Polarisator (+Pol) umgelenkt und verlässt das Interferometer. Sie trifft nun auf ein $\lambda/2$ -Plättchen ($22,5^\circ$) und anschließend auf einen weiteren Polarisationsstrahlteilerwürfel (PBS2). Das hierbei transmittierte Licht (horizontal polarisiert) wird in eine Singlemodefaser eingekoppelt (Einkoppler ohne regelbare Linse), die ebenfalls an den APD angeschlossen ist. Der reflektierte Anteil fällt auf eine Blende.

Das Interferometer soll möglichst langzeit-stabil sein (s. Abschnitt 3.2.2), weshalb nur die wichtigsten Komponenten auf ein kleines Breadboard (25×20 cm) geschraubt sind. Die Polarisationsanalyse sowie der Motor für das Glasplättchen werden daher direkt auf dem optischen Tisch befestigt, um Schwingungsüberträge auf die optischen Bauteile zu vermeiden.

Zur Justage des Interferometers sind alle relevanten optomechanischen Komponenten dreh- bzw. verkippbar. Der Spiegel (Sp1) ist außerdem auf einem Verschiebetisch montiert. Für diese Arbeiten wird die Abschwächung im Laser entfernt und eine CCD-Kamera (engl. 'charged-coupled-device') bzw. Strahlprofiler zur Betrachtung der Moden im und nach dem Interferometer verwendet.

3.1.2 Aufbau der Sagnac-Schleife und Methodik der Feinjustage

Die Justage des Versuchsaufbaus startet mit dem Polarisationsstrahlteiler (PBS1), welcher derart gedreht bzw. verkippt wird, sodass die beiden Moden a und b parallel zur Oberfläche sowie zu den Kanten des optischen Tisches verlaufen und zueinander einen rechten Winkel bilden. Da der Post dieses PBS1 nicht höhenverstellbar ist, ist die Höhe des Strahlenganges relativ zur Oberfläche des optischen Tisches im Wesentlichen festgelegt.

Nun wird das Prisma (Pr) eingebaut und mithilfe der Mode a justiert. Entscheidend ist hier, dass der aus dem Prisma austretende Strahl wieder parallel zum Tisch (Kanten und Oberfläche) sowie zum Strahl a direkt nach dem PBS1 verläuft. Daran anschließend wird Mode b mit einer langen Blende blockiert und der Spiegel (Sp1) eingebaut. Letzterer wird derart eingestellt, dass a möglichst senkrecht auf die Oberfläche des Polarisationsstrahlteilers trifft. Da das Licht in dieser Mode horizontal polarisiert ist wird es am PBS1 einfach in a' transmittiert und kann zur Nachjustage des Spiegels (Sp1) verwendet werden. Dieser wird so eingestellt, dass a' parallel zum Tisch und senkrecht zu a verläuft. Nun wird die Blende aus dem Strahlengang von b herausgenommen. Da das Licht in dieser Mode vertikal polarisiert ist, wird es nach dem Durchlauf durch das Interferometer in die Richtung a' reflektiert. Überlappen die beiden Strahlen in a' noch nicht, wird der Spiegel (Sp1) geringfügig nachjustiert, bis mit bloßem Auge nur noch ein einziger Lichtstrahl zu erkennen ist.

Für die bisher beschriebenen Schritte sind lediglich ein Winkeleisen sowie Maßstab bzw. Schieblehre notwendig.

Zur Feinjustage des Strahlüberlapps in a' wird die Polarisationsanalyse und dahinter eine CCD-Kamera in den Strahlengang gebracht. Durch Blockieren von jeweils einer Mode lassen sich die beiden noch nicht überlappenden Strahlen auf dem Bildschirm identifizieren. Solange die beiden Moden noch nicht perfekt 'ineinander liegen' treten bei Analyse in der Plus-Basis horizontale bzw. vertikale Interferenzstreifen auf (s. Abb.3.3e). Durch vorsichtiges Verkippen bzw. Verdrehen des Spiegels (Sp1) bzw. des PBS1 werden die Strahlen zum vollständigen Überlapp gebracht. Man beobachtet bei diesem Vorgang ein 'Durchlaufen' der Interferenzstreifen sowie eine gleichzeitige Abnahme ihrer Anzahl. Schlussendlich ist nur noch ein Interferenzstreifen konzentrischer Form, also eine einzige runde Mode, auf dem Bildschirm zu erkennen (s. Abb.3.3f). Durch ein erneutes Blockieren der Arme a bzw. b lässt sich der Überlapp bestätigen.

Nun wird das Glasplättchen in das Interferometer eingebaut, wobei bereits durch manuelle Drehung des Motors ein Flackern der Mode auf dem Bildschirm beobachtet werden kann - also ein Wechsel zwischen konstruktiver bzw. destruktiver Interferenz durch Variation der Phase zwischen den beiden Moden a und b (s. Abb.3.3g,h).² Nun können die

²Die Interferenzphänomene lassen sich auch mit den beiden Halbwellenplättchen im Interferometer

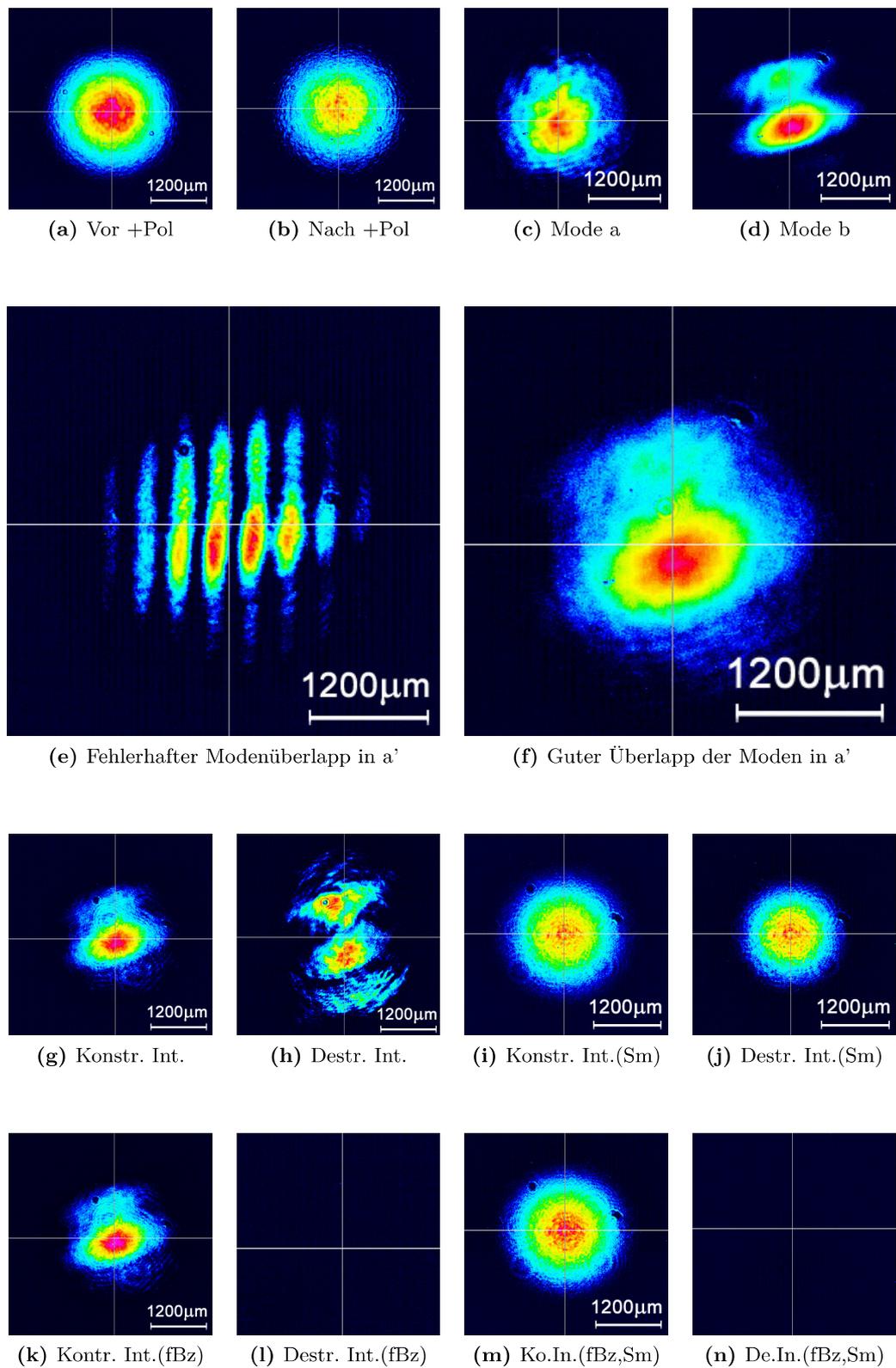


Abbildung 3.3: Aufnahmen der Modenstrukturen. Die Bilder a-d zeigen die Strahlprofile vor und nach dem PBS1. Abbildungen e,f und g-j illustrieren den Modenüberlapp bzw. die Interferenzeffekte (vor und nach der Singlemodefaser) in a'. Letztere sind erneut in k-n dargestellt, allerdings bei fester Belichtungszeit (fBz).

einzelnen Komponenten mit Hilfe des AP-Detektors solange nachjustiert werden, bis der Wechsel zwischen Maxima und Minima der Ausgangs-Intensität bei Drehung des Glasplättchens (Gl) möglichst ausgeprägt ist. Die quantitative Untersuchung der Interferenz ist in Abschnitt 3.2.1 dargestellt.

3.2 Charakterisierung des Interferometers

3.2.1 Visibility

Als Maß für die Funktionsfähigkeit eines Interferometers eignet sich die Visibility V , welche die 'Qualität' der Interferenz beschreibt. Man definiert sie als

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (3.1)$$

Dabei sind I_{max} bzw. I_{min} die Intensitäten bei maximal konstruktiver bzw. bei vollständig destruktiver Interferenz. Idealerweise ist $I_{min} = 0$ und folglich $V = 1$.

Quantenmechanische Beschreibung der Interferenzeffekte

Am ersten Polarisator wird ein $|+\rangle$ -Zustand durch projektive Messung am ankommenden Photon präpariert:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle)$$

Der darauf folgende Polarisationsstrahlteiler (PBS1) führt erneut eine Messung aus und verteilt die Photonen mit gleicher Wahrscheinlichkeit in die Moden a bzw. b,

$$|+\rangle \xrightarrow{PBS} \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle |a\rangle + i |V\rangle |b\rangle) \quad (3.2)$$

Der Phasenschub von $\pi/2$ kommt durch die Reflektion im PBS1 zustande. Das Glasplättchen (Gl) erzeugt nun einen zusätzlichen, vom Drehwinkel α , abhängigen Phasenschub $\Phi(\alpha)$, falls das Photon in die Mode a transmittiert wurde:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle |a\rangle + i |V\rangle |b\rangle) \xrightarrow{Gl} \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle |a\rangle e^{i\Phi(\alpha)} + i |V\rangle |b\rangle)$$

Da die beiden Halbwellenplättchen für diesen Teilversuch aus der Sagnac-Schleife entfernt werden, wird nun entweder das Photon aus a durch den PBS1 direkt in die Mode a' transmittiert oder aus der Mode b reflektiert:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle |a\rangle e^{i\Phi(\alpha)} + i |V\rangle |b\rangle) \xrightarrow{PBS} \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle e^{i\Phi(\alpha)} + |V\rangle) |a'\rangle = |\Psi\rangle$$

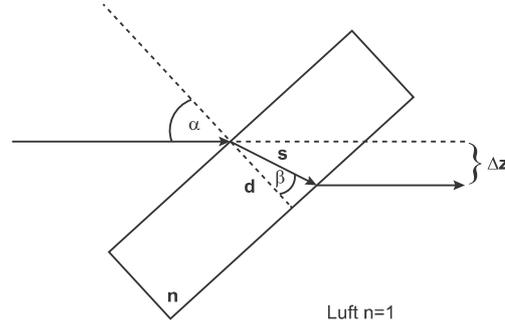


Abbildung 3.4: Geometrie eines Glasplättchens in der Ansicht von oben. n bezeichnet hierbei den Brechungsindex.

Analysiert man diesen Zustand in der Plus/Minus-Basis, so ergeben sich die folgenden Detektionswahrscheinlichkeiten:

$$P(+, a') = |\langle +, a' | \Psi \rangle|^2 = \frac{1}{4} |e^{i\Phi(\alpha)} + 1|^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos \Phi) \quad (3.3)$$

$$P(-, a') = |\langle -, a' | \Psi \rangle|^2 = \frac{1}{4} |e^{i\Phi(\alpha)} - 1|^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos \Phi) \quad (3.4)$$

Je nach Einstellung des Glasplättchens liegt konstruktive oder destruktive Interferenz vor. Es ist jedoch zu beachten, dass die Phase $\Phi(\alpha)$ nicht linear mit dem Drehwinkel skaliert. Der tatsächliche Phasenschub lässt sich jedoch aus der Geometrie des Glasplättchens herleiten.

Funktionsweise des Phasenschiebers

Das Licht wird beim Übergang ins Glas zu dessen Einfallslot hin gebrochen. Beim Verlassen dieses optisch dichteren Mediums verhält es sich umgekehrt, d.h. der Strahl wird mit dem selben Winkel weggebrochen und verläuft daher wieder parallel zur Einfallsrichtung (s. Abb. 3.4). Je nachdem, wie dick das Glasplättchen ist, entsteht jedoch einen Strahlversatz Δz zwischen dem einfallenden und dem phasenverschobenen Licht. Wie groß Δz sei darf, bevor unerwünschte Nebeneffekte auftreten (z.B. Verringerung des Strahlüberlapps) hängt von der Toleranz der jeweiligen Versuchsanordnung ab, d.h. vom Durchmesser der räumlichen Moden im Interferometer.

Im Folgenden soll die erzeugte Phasendifferenz berechnet werden. Beim Eintritt in das Medium gilt nach dem Brechungsgesetz, dass

$$n_u \sin \alpha = n \sin \beta \quad (3.5)$$

wobei n_u der Brechungsindex der Umgebung und β der Brechungswinkel relativ zum Einfallslot sind. Die Umgebung ist hierbei Luft, sodass $n_u \approx 1$ angenommen werden kann. Der im Medium zurückgelegte optische Weg s ergibt sich zu

$$s = \frac{nd}{\cos \beta} \stackrel{(3.5)}{=} \frac{nd}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \alpha}} \quad (3.6)$$

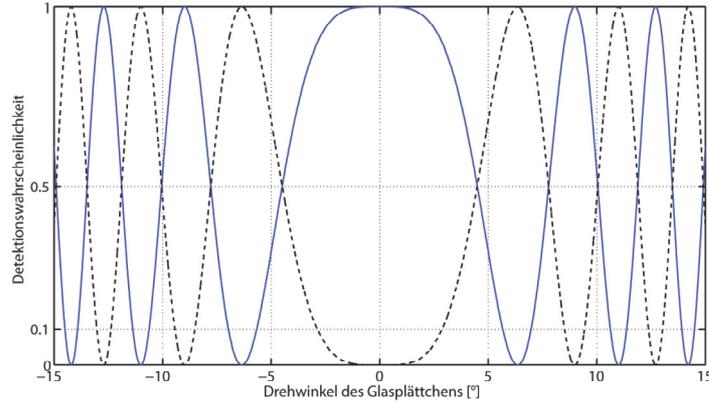


Abbildung 3.5: Theoretisch vorhergesagte Intensitäten in a' bei Messung in der Plus (durchgezogene Linie) bzw. Minus (gestrichelte Linie)-Basis in Abhängigkeit vom Drehwinkel des Glasplättchens.

Für Licht der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ entspricht dies einer zusätzlichen Phase φ von

$$\varphi = \frac{2\pi s}{\lambda} = \frac{2\pi nd}{\lambda \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \alpha}} \quad (3.7)$$

Im Fall $\alpha = 0$ ergibt sich

$$\varphi_0 = \frac{2\pi nd}{\lambda} \quad (3.8)$$

Man erhält schlussendlich als Phasendifferenz in Abhängigkeit vom Einfallswinkel [Kre10]:

$$\Phi(\alpha) = \varphi - \varphi_0 \stackrel{(3.7,3.8)}{=} \frac{2\pi nd}{\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \alpha}} - 1 \right) \quad (3.9)$$

Die Funktion (3.9) steigt für sehr kleine Winkel sehr langsam und geht daran anschließend in einen quadratischen Bereich über. Für Winkel im Bereich von 45° verhält sich $\Phi(\alpha)$ hingegen linear.

Mit Hilfe von (3.9) lassen sich nun die Intensitäten für die Analyse in Plus/Minus-Basis (3.3) in Abhängigkeit vom Drehwinkel des Glasplättchens ausdrücken (s. Abb. 3.5):

$$I_{a',+} \propto \frac{1}{2} (1 + \cos \Phi) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left[\frac{2\pi nd}{\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \alpha}} - 1 \right) \right] \right) \quad (3.10)$$

$$I_{a',-} \propto \frac{1}{2} (1 - \cos \Phi) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left[\frac{2\pi nd}{\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \alpha}} - 1 \right) \right] \right)$$

Experimentelle Bestimmung der Visibility

Zur Ermittlung der Visibility am unteren Ausgang a' wird das Glasplättchen G1 mithilfe eines Motors automatisch gedreht und für jede Winkeleinstellung die gemessene Photonenrate am AP-Detektor aufgezeichnet. Die Polarisationsanalyse besteht aus einer $\lambda/2$ Platte auf $22,5^\circ$ sowie einem H-Polarisator, um in die Plus-Basis zu projizieren.

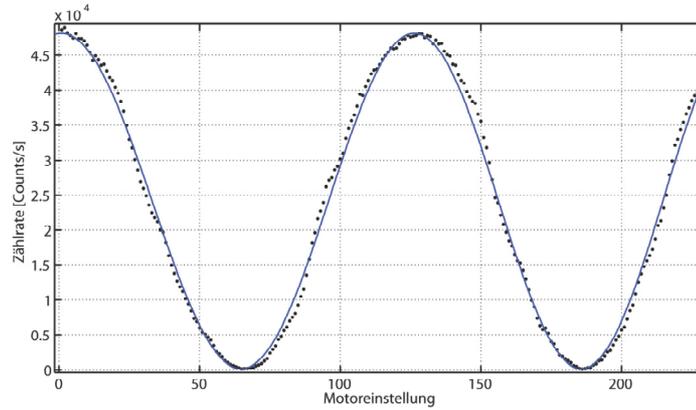


Abbildung 3.6: Fit der Funktion (3.10) an die experimentell ermittelten Zählraten in Abhängigkeit von der Motoreinstellung (Drehwinkel des Glasplättchens).

Erwartet wird eine Abhängigkeit der Intensität vom Drehwinkel der Form (3.10). Experimentell ergibt sich in guter Übereinstimmung mit dieser theoretischen Erwartung der in Abbildung 3.6 dargestellte Verlauf. Die nötigen Intensitäten zur Ermittlung der Visibility werden aus der Fit-Funktion (Dunkelzählraten bereits abgezogen) an die Messwerte entnommen und ergeben sich zu $I_{min} = 119\text{s}^{-1}$ und $I_{max} = 48159\text{s}^{-1}$. Dies entspricht einer Visibility von

$$V = 0.9951 \pm 0.0001.$$

Der zugehörige absolute Fehler wird dabei aus dem Konfidenzintervall des Fits bestimmt.

Es ist jedoch zu beachten, dass dieses Ergebnis auch dadurch bedingt wird, dass die Intensitätsmessungen nach dem Einkoppeln in die Singlemodefaser durchgeführt werden. Bestimmt man die Visibility direkt nach der Polarisationsanalyse, so stellt sich ein Wert von $V \approx 0.95$ ein. Der Grund für diese Diskrepanz liegt in den unterschiedlichen räumlichen Strukturen der Moden a und b, welche durch den Polarisationsstahlteiler am Eingang des Interferometers erzeugt werden. Wie aus Abbildung 3.3a,b bzw. c,d hervorgeht, verändert der PBS1 die räumliche Verteilung der Intensität in beiden Moden. Das transmittierte Licht behält dabei im Wesentlichen die TEM_{00} Struktur, der reflektierte Anteil erscheint jedoch stark deformiert. Eine kohärente Überlagerung der in Abbildung 3.3c,d dargestellten Strahlprofile führt bei destruktiver Interferenz zu einem asymmetrischen Intensitätsprofil (Abb. 3.3h), bei dem nur in bestimmten Bereichen Auslöschung stattfindet. Dies führt zu einer Reduzierung der Visibility. Im Fall von konstruktiver Interferenz sind diese 'schlechten' Anteile ebenfalls vorhanden, werden jedoch wegen ihrer geringen Intensität und der automatischen Belichtungszeit des Beamprofilers in Abbildung 3.3g nicht mehr wahrgenommen.

Durch das Einkoppeln in die Singlemodefaser werden nun die nicht-gaußförmigen Anteile herausgefiltert (ca. 39% Leistungsverlust), was zwar zu einer Erhöhung der Visibility auf $V = 0.9951$ nach der Faser, aber gleichzeitig auch zu einer starken Abhängigkeit davon, welcher Anteil der räumlichen Mode eingekoppelt wird, führt.

Durch Einbringen der Halbwellenplättchen in die Sagnac-Schleife kann der Ausgang b' ebenfalls verwendet werden. Wegen einem Mangel an gewissen optischen Bauteilen konnte dieser jedoch im zeitlichen Rahmen dieser Arbeit nicht sinnvoll genutzt werden.

3.2.2 Stabilität

Wie in Abschnitt 2.3.2 illustriert wurde, muss für Experimente, die längere Zeit in Anspruch nehmen, sichergestellt sein, dass das Interferometer langzeitstabil ist. Das bedeutet, dass sich die Zählrate am Ausgang für eine fest eingestellte Phase Φ am Glasplättchen nicht mit der Zeit ändert bzw. driftet. Genauer gesagt soll sie stets um den selben Mittelwert schwanken, da der verwendete Laser natürlich selbst Intensitätsfluktuationen aufweist. Grundsätzlich kommen derartige Drifts oder Unregelmäßigkeiten in der Ausgangsleistung durch externe Einflüsse, wie zum Beispiel Temperaturschwankungen (das Labor ist temperaturstabilisiert) oder Vibrationsüberträge aus der Umgebung, zustande. Diese Störfaktoren erzeugen willkürliche Phasenschübe, die die Interferenzfähigkeit beeinflussen können. Bei Analyse in der Plus-Basis lässt sich hierbei schreiben:

$$I(\alpha, t) = \frac{I_0}{2} (1 + \cos [\Phi(\alpha) + \Delta\Phi(t)]). \quad (3.11)$$

Dabei sind I_0 die ins Interferometer eingekoppelte Intensität, $\Phi(\alpha)$ die Phase des Glasplättchens und $\Delta\Phi(t)$ die externen Einflüsse, ausgedrückt durch eine zeitabhängige relative Phase zwischen den Moden a und b.

Zur experimentellen Überprüfung der Stabilität des Interferometers wird die Intensität am Ausgang a' mithilfe einer Photodiode über einen bestimmten Zeitraum aufgezeichnet. Dazu wird die Polarisationsanalyse auf die Plus-Basis eingestellt und nach der darauf folgenden Singlemodefaser ein Glasfaserkollimator angebracht, der das Licht wieder auskoppelt. Vor Letzterem ist in geringem Abstand die Photodiode platziert, deren Spannung mit einem Multimeter aufgezeichnet und an einen Computer weitergegeben wird. Die Phase ist dabei so eingestellt, dass sich die Ausgangsleistung genau zwischen einem Maximum konstruktiver und einem Minimum destruktiver Interferenz befindet, da das Interferometer dort am sensitivsten auf äußere Störfaktoren reagiert. Wegen $\Phi(\alpha) = \pi/2$ wird (3.11) zu:

$$\tilde{I}(t) = \frac{I_0}{2} (1 + \sin [\Delta\Phi(t)]) \quad \text{mit} \quad I_{mean} = \tilde{I}(\Delta\Phi(t) = 0) = \frac{I_0}{2}. \quad (3.12)$$

Abbildung 3.7a zeigt den experimentell bestimmten Verlauf dieser Funktion über einen Zeitraum von 26 Stunden. Das Interferometer stellt sich hierbei als durchaus langzeitstabil heraus. In der angegebenen Messung ergibt sich ein Mittelwert der Spannung von $I_{mean} = 1.8749\text{V}$ mit einer Standardabweichung³ (std) von $I_{std} = 0.02120\text{V}$. Dies lässt sich mit (3.12) auch in Phasen ausdrücken, wobei $I_0 = 2 \cdot I_{mean}$ angenommen wird:

$$I_{std} + I_{mean} = \frac{I_0}{2} (1 + \sin [\Delta\Phi_{std}]) \Rightarrow \Delta\Phi_{std} = \arcsin \left[\frac{I_{std}}{I_{mean}} \right] = 0.0113\text{rad}.$$

³Die Standardabweichung gibt an, wie stark die Messdaten im Mittel um den Erwartungswert gestreut sind.

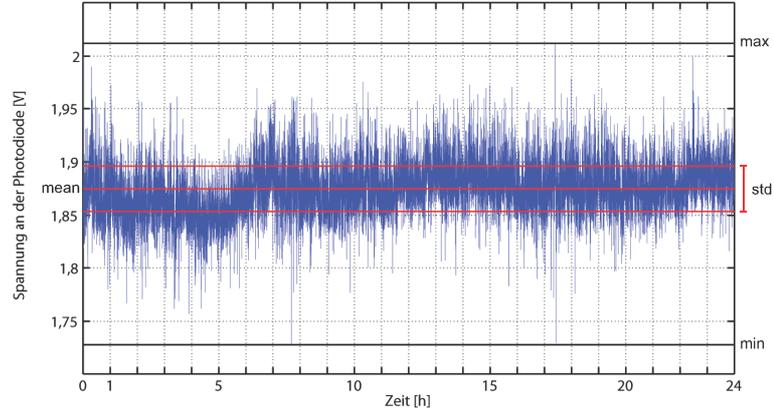


Abbildung 3.7: Stabilitätsmessung am Interferometer über 26 Stunden.

Im Mittel schwankt die Phase um 0.360% bzgl. einer Periode π . Für die maximalen Abweichungen $I_{max} = 2.0120\text{V}$ und $I_{min} = 1.7280\text{V}$ ergeben sich analog:

$$\Delta\Phi_{max} = \arcsin\left[\frac{I_{max} - I_{mean}}{I_{mean}}\right] = +0.0732\text{rad} = +0.0233\pi,$$

$$\Delta\Phi_{min} = \arcsin\left[\frac{I_{min} - I_{mean}}{I_{mean}}\right] = -0.0784\text{rad} = -0.0249\pi.$$

Dies entspricht maximalen Phasenschüben von 2.33% und 2.50% . Es ist hierbei jedoch zu beachten, dass die gemessenen Intensitätsschwankungen teilweise auch durch den Laser bedingt sind, da I_0 ist streng genommen keine Konstante ist. Die oben berechneten Phasenschübe beinhalten daher sowohl externe Einflüsse als auch die zeitlich variable Laserleistung, die eigentlich keine Auswirkung auf die Phasen hat, aber wegen der Konzeption der Messung mit aufgezeichnet wird.

Die gute Stabilität des Sagnac-Interferometers manifestiert sich in der geringen Standardabweichung und kommt durch dessen spezielle Bauweise zustande. Es besteht aus möglichst wenig Komponenten, die zusätzlich von beiden Strahlen gleichzeitig benutzt werden. Dies führt dazu, dass etwaige Phasenschübe auf beide Pfade mit gleichem Betrag wirken und sich somit kompensieren. Neben der Minimierung der Anzahl an nötigen Bauteilen bedingt die Geometrie der Anordnung außerdem, dass beide Strahlen gleichlange und -artige Strecken im Interferometer durchlaufen. Die Sagnac-Schleife ist aufgrund dieser Eigenschaften bereits inhärent stabil. Zur weiteren Verminderung von Vibrationsüberträgen werden sämtliche sekundären Bauteile (Motor, Polarisationsanalyse) direkt auf dem optischen Tisch befestigt und nicht auf dem Breadboard des Interferometers (s. Abb. 3.2b).

Fall nötig, könnte das Interferometer zur weiteren Verbesserung der Stabilität von seiner Umgebung thermisch isoliert und der optische Tisch stärker gefedert werden.

Bauteil	Mode a	Mode b
PBS1	2.47%	2.47%
Gl	8.58%	-
Pr	9.70%	10.0%
Hwp	4.68%	3.88%
Sp1	2.66%	2.66%
Sp2	-	34.0%

Tabelle 3.1: Reflektionsverluste der Bauteile im Interferometer. PBS: Polarisationsstrahlteiler, Pr: Reflektionsprisma, Gl: Glasplättchen, Hwp: Beide Halbwellenplättchen im Interferometer.

3.2.3 Effizienz

Sämtliche Messungen werden mit einem CW-Laser durchgeführt. Soll das Interferometer jedoch in kompliziertere Experimente, die von Hyperentanglement Gebrauch machen, integriert werden, so muss es auch mit Einzelphotonenquellen betrieben werden können. Die Zählraten sind in solchen Fällen deutlich geringer und etwaige Verluste im Aufbau spielen, insbesondere für Koinzidenzmessungen an mehreren Photonen, eine wichtige Rolle.

Das Sagnac-Interferometer ist bzgl. dieses Standards noch nicht effizient genug. Insgesamt geht etwa 50% der in den Versuchsaufbau eingekoppelten Leistung allein durch unerwünschte Reflektion, Transmission und Absorption an den verwendeten Bauteilen verloren. Eine tabellarische Übersicht entnimmt man 3.1. Die großen Verluste am Prisma und Glasplättchen kommen durch dessen Anti-Reflexbeschichtungen zustande, da diese nicht für die hier verwendete Wellenlänge von 806nm ausgelegt sind und deswegen ein großer Anteil der einfallenden Intensität in den Strahl zurückreflektiert wird. Auch an den Halbwellenplättchen fällt relativ viel Leistung durch Beugungsverluste ab, da der Abstand zwischen den Moden a und b sehr groß gewählt ist (ca. 1cm) und damit in den Bereich des Durchmessers der HWP gelangt. Der PBS1 weist ebenfalls ungewöhnlich hohe Verluste von insgesamt 4,94% auf und bedingt, wie in Abschnitt 3.2.1 diskutiert wurde, eine starke räumliche Deformation der Mode b. Das Einkoppeln in eine Singlemodefaser am Ausgang a' kompensiert diesen Effekt zwar, führt aber gleichzeitig zu einer zusätzlichen Verschlechterung der Effizienz, da hierbei weitere 39% an Licht-Leistung verloren gehen.

Wie eingangs erwähnt ist die Effizienz eines Interferometers entscheidend für dessen Einsetzbarkeit in komplexeren Experimenten. Es besteht in dieser Hinsicht noch deutlicher Verbesserungsbedarf, besonders in Hinblick auf die Qualität der zum Einsatz kommenden Bauteile. Neben der Verwendung einer zur Wellenlänge passenden Anti-Reflexbeschichtung am Reflektionsprisma (Pr) und Glasplättchen (Gl) sollten vor allem der Spiegel Sp2 sowie der Einkoppler am Ausgang b' des Interferometers ausgetauscht werden, damit auch dieser Output sinnvoll genutzt werden kann. Des Weiteren ist es nötig, den Polarisationsstrahlteiler PBS1 auszuwechseln, da dessen Wirkung auf die Mode b (s. Abb.3.4d) einen großen räumlichen Anteil der in den Ausgängen interferierenden Moden unbrauchbar macht (vgl. Abb. 3.3h).

3.3 Tomographische Analyse des erzeugten Zustandes

Die Hauptaufgabe des Interferometers ist die Präparation eines Bell-Zustandes, bei dem Polarisations- und Ortsfreiheitsgrad miteinander verschränkt sind. Zur Überprüfung der Funktionalität ist es daher nötig, die erzeugte Dichtematrix zu rekonstruieren und mit dem theoretisch erwarteten Zustand zu vergleichen. Dazu wird am Ausgang a' des Interferometers eine wie in Abschnitt 2.3 beschriebene Zustandstomographie durchgeführt. Die Polarisationsanalyse besteht aus einem Viertel- und Halbwellenplättchen sowie einem H-Polarisator. Die Ausmessung des räumlichen Qubits geschieht dabei durch Blockieren jeweils einer Mode oder durch eine entsprechende Einstellung der Phase $\Phi(\alpha)$ am Glasplättchen Gl [Rei10], dessen Drehwinkel α mit einem Motor gesteuert wird. Vor den eigentlichen Messungen muss daher eine Kalibrationskurve aufgenommen werden, damit das zweite Qubit anschließend in die richtigen Basen projiziert wird.

Die hierbei durchzuführenden Messungen sind in Tabelle 3.2 zusammengestellt. Bei deren Auswertung ist zu beachten, dass die letzten Acht Zählraten jeweils durch zwei geteilt werden müssen. Das liegt daran, dass der räumliche Freiheitsgrad im Gegensatz zum Polarisations-Qubit nicht mithilfe eines Polarisators ausgemessen wird, der die Hälfte der Intensität herausfiltern würde. Das heißt, es werden hierbei Photon aus beiden Armen des Interferometers ohne jegliche Filterung detektiert, was bei der Berechnung der Dichtematrix entsprechend berücksichtigt werden muss.

Nach Abzug der mittleren Dunkelzählraten ergeben sich mit der Beziehung (2.50) Real- und Imaginärteil der Dichtematrix zu

$$\Re[\hat{\rho}_{exp}] = \begin{pmatrix} 0.5481 & -0.1329 & -0.0076 & -0.0107 \\ -0.1329 & 0.0017 & -0.0422 & 0.0340 \\ -0.0076 & -0.0422 & 0.0118 & -0.0782 \\ -0.0107 & 0.0340 & -0.0782 & 0.4383 \end{pmatrix},$$

$$\Im[\hat{\rho}_{exp}] = \begin{pmatrix} 0 & 0.1223 & -0.0624 & -0.5185 \\ -0.1223 & 0 & 0.2435 & 0.0513 \\ 0.0624 & -0.2435 & 0 & 0.1154 \\ 0.5185 & -0.0513 & -0.1154 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix lauten -0.3103 , -0.0214 , 0.2857 und 1.0460 , was gemäß (2.19) ein unphysikalisches Ergebnis darstellt. Es muss daher mit der in Abschnitt 3.2.3 beschriebenen Maximum-Likelihood-Methode gefittet werden.

3.3.1 Maximum-Likelihood-Abschätzung

Zur Minimierung der zugehörigen Likelihoodfunktion (2.54) wird die MatLab Funktion `fmunc` verwendet, wobei die Startwerte für die Fit-Parameter t_1, \dots, t_{16} (2.52) zufällig gewählt werden. Man erhält mit 20 gewürfelten Werten die nun physikalische Dichtematrix

ν	Basis	$\lambda/2$ [°]	$\lambda/4$ [°]	Φ
1	$ H, a\rangle$	0	0	b blockiert
2	$ H, b\rangle$	0	0	a blockiert
3	$ V, b\rangle$	45	0	a blockiert
4	$ V, a\rangle$	45	0	b blockiert
5	$ R, a\rangle$	0	-45	b blockiert
6	$ R, b\rangle$	0	-45	a blockiert
7	$ +, b\rangle$	22.5	0	a blockiert
8	$ +, a\rangle$	22.5	0	b blockiert
9	$ +, R\rangle$	22.5	0	$-\pi/2$
10	$ +, +\rangle$	22.5	0	0
11	$ R, +\rangle$	0	-45	0
12	$ H, +\rangle$	0	0	0
13	$ V, +\rangle$	45	0	0
14	$ V, L\rangle$	45	0	$+\pi/2$
15	$ H, L\rangle$	0	0	$+\pi/2$
16	$ R, L\rangle$	0	-45	$+\pi/2$

Tabelle 3.2: Im Rahmen der Zustandstomographie durchgeführte Messungen.

$\hat{\rho}_{ml}$:

$$\Re[\hat{\rho}_{ml}] = \begin{pmatrix} 0.5406 & -0.0149 & -0.0104 & 0.0251 \\ -0.0149 & 0.0037 & 0.0013 & 0.0264 \\ -0.0104 & 0.0013 & 0.0108 & 0.0423 \\ 0.0251 & 0.0264 & 0.0423 & 0.4449 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

$$\Im[\hat{\rho}_{ml}] = \begin{pmatrix} 0 & -0.0320 & -0.0480 & -0.4874 \\ 0.0320 & 0 & -0.0016 & 0.0166 \\ 0.0480 & 0.0016 & 0 & 0.0064 \\ 0.4874 & -0.0166 & -0.0064 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

mit den Eigenwerten 0, 0, 0.0103 sowie 0.9897. Eine anschauliche Darstellung der Matrixelemente ist Abbildung 3.8 zu entnehmen.

Aus dem Spektrum lassen sich direkt der Reinheitsgrad (2.24),

$$P = 0.0103^2 + 0.9897^2 = 0.9796,$$

und die von Neumann Entropie (2.25) berechnen:

$$S = -0.0103 \cdot \log_2(0.0103) - 0.9897 \cdot \log_2(0.9897) = 0.0827.$$

Das heißt, nach der Präparation liegt ein nahezu reiner Zustand vor.⁴ Des Weiteren kann

⁴Im Idealfall nehmen die Purity den Wert 1 und die von Neumann Entropie einen möglichst geringen Wert an.

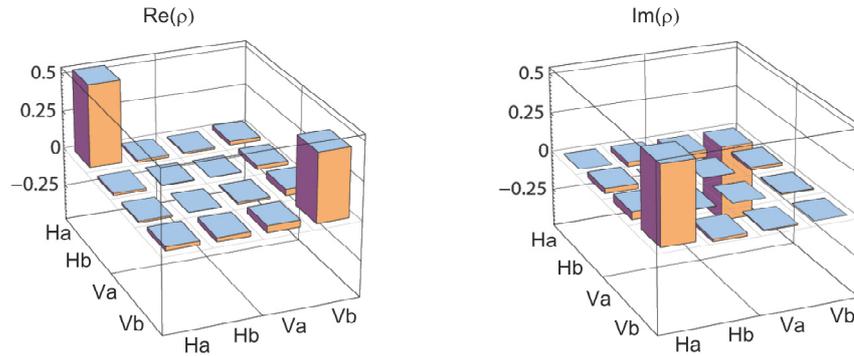


Abbildung 3.8: Anschauliche Darstellung der gefitteten Dichtematrix in Form eines Balkendiagrammes. Die Beschriftung zur Angabe des jeweiligen Matrixelementes liest sich von links nach rechts.

dessen Überlapp mit dem theoretisch erwarteten, verschränkten Bell-Zustand (3.2),

$$\hat{\rho}_{theo} = \begin{pmatrix} +0.5 & 0 & 0 & -0.5i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +0.5i & 0 & 0 & +0.5 \end{pmatrix},$$

durch die Bildung der Fidelity (2.26) überprüft werden:

$$F(\hat{\rho}_{ml}, \hat{\rho}_{theo}) = 0.9802.$$

Dies entspricht ebenfalls einem guten Ergebnis. Wie in Abschnitt 2.2.1 gezeigt wurde ist eine weitere, für maximal verschränkte Zustände charakteristische Eigenschaft, dass sie sich lokal wie weißes Rauschen verhalten. Dies lässt sich durch Bildung der partiellen Spur (2.22) über $\hat{\rho}_{ml}$ bestätigen:

$$\hat{\rho}_{ml}^s = \begin{pmatrix} 0.5443 & 0.0160 \\ 0.0160 & 0.4557 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & -0.0314 \\ +0.0314 & 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man erneut die Fidelity aus diesem Ergebnis und der Definition des maximal gemischten Zustandes (2.21), so ergibt sich ein Wert von

$$F(\hat{\rho}_{ml}^s, \hat{\rho}_{wr}^s) = 0.9968.$$

3.3.2 Nachweis der Verschränkung und Fehleranalyse

Der gute Überlapp von $\hat{\rho}_{ml}$ mit dem Bell-Zustand deutet zwar schon Verschränkung an, jedoch lassen sich für den direkten Nachweis auch die Eigenwerte der partiellen Transponierten im Sinne von (2.39) berechnen. Es ergibt sich für beide Qubits das Spektrum $-0.4861, 0.4361, 0.4936$ und 0.5564 - der Zustand ist damit verschränkt.⁵

Zur Quantifizierung der vorhandenen Verschränkung können aus den Eigenwerten der

⁵Das PPT Spektrum der theoretischen Dichtematrix lautet $-0.5, 0.5, 0.5$ und 0.5 .

Größe	Mittelwert	Std [$\times 10^{-4}$]	Max. Abw. [$\times 10^{-4}$]	
Purity P	0.9796	6.5564	± 19.0	(0.194%)
Neum. Entr. S	0.0827	22.0	± 63.0	(7.62%)
Fidelity F	0.9802	2.9691	± 9.6731	(0.0987%)
Concurrence C	0.9774	5.7411	± 17.0	(0.174%)
EoF E_f	0.9676	8.2196	± 24.0	(0.248%)
Negativität N	0.4861	3.2879	± 8.8495	(0.182%)
Log. Negat. N_l	0.9798	4.8104	± 13.0	(0.133%)

Tabelle 3.3: Ergebnisse der Monte-Carlo Simulation. Die letzte Spalte gibt die maximale Abweichung vom Mittelwert in Prozent an.

PPT direkt die Negativität (2.40),

$$N(\hat{\rho}_{ml}) = \frac{1}{2} (0.4861 + 0.4361 + 0.4936 + 0.5564 - 1) = 0.4861,$$

und die logarithmische Negativität (2.41),

$$N_l(\hat{\rho}_{ml}) = \log_2 (0.4861 + 0.4361 + 0.4936 + 0.5564) = 0.9798,$$

berechnet werden. Im Idealfall sind $N = 0.5$ bzw. $N_l = 1$ oder jeweils gleich Null für separable Zustände.

In diesem Zusammenhang lassen sich auch die in Abschnitt 2.2.3 eingeführten Concurrence (2.44) und Entanglement of Formation (2.45) ermitteln. Die Eigenwerte der Matrix $\hat{R} = \hat{\rho}_{ml} \hat{\Sigma} \hat{\rho}_{ml}^T \hat{\Sigma}$ ergeben sich hierbei zu $\{0, 0, 0.0049, 0.9824\}$, was mit (2.44) auf eine Concurrence von $C(\hat{\rho}_{ml}) = 0.9775$ führt. Das EoF kann nun mit (2.45) bestimmt werden und ergibt sich zu $E_f(\hat{\rho}_{ml}) = 0.9677$. Für einen perfekten verschränkten Zustand nehmen beide Größen den Wert 1 und andernfalls den Wert 0 an.

Es konnte damit zwar erfolgreich nachgewiesen werden, dass der durch das Sagnac-Interferometer präparierte Zustand viel Verschränkung enthält, jedoch skalieren die Verschränkungsmaße hierbei unterschiedlich, sodass eine absolute Aussage nicht möglich ist.

Zur Abschätzung der Fehler lässt sich die in 2.3.2 beschriebene Monte-Carlo Simulation durchführen. Es werden dabei insgesamt 500 neue Dichtematrizen aus den experimentellen Rohdaten gewürfelt und anschließend mit der Maximum-Likelihood-Methode gefittet. Daraus lässt sich die Standardabweichung (Std) und maximale Abweichung der bisher berechneten Größen angeben. Die Ergebnisse entnimmt man Tabelle 3.3.

Der verhältnismäßig große Fehler der von Neumann Entropie resultiert direkt aus deren Definition, welche sensibler auf Abweichungen vom Mittelwert reagiert.⁶ Davon abgesehen fallen die Fehler mit maximal 0.248% gering aus. Auch die Streuung um den Mittelwert, ausgedrückt durch die Standardabweichung, ist für die meisten Größen von geringer Tragweite.

⁶Dies lässt sich durch eine Taylorentwicklung bzw. Betrachtung der Fehlerfortpflanzung leicht bestätigen.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit konnte gezeigt werden, dass das hierbei aufgebaute Sagnac-Interferometer einen nahezu reinen Bell-Zustand hoher Visibility über lange Zeiträume zuverlässig präparieren kann, dessen Qualität sich vor allem in der Purity von 97.96% und Fidelity von 98.02% (bzgl. der theoretischen Erwartung) manifestiert. In diesem Zusammenhang wurde auch die Verschränkung zwischen der Polarisation und des räumlichen Freiheitsgrades der Photonen erfolgreich mithilfe von Verschränkungsmaßen nachgewiesen und quantifiziert, wobei die normierten Maße Werte zwischen 0.9677 und 0.9798 annehmen. Die bei der hierfür durchgeführten Zustandstomographie auftretenden Fehler wurden mit einer Monte-Carlo Simulation abgeschätzt und nehmen für die relevanten Größen Maximalwerte von 0.0987% bis 0.248% an. Letztere könnten nach dem Vorschlag von A. Steinberg und R. Adamson [AS10] durch die Wahl eines alternativen Satzes von Messbasen zur Minimierung der Redundanz pro Messung noch weiter reduziert und die Qualität der Tomographie an sich verbessert werden.

Die Anwendbarkeit des Versuchsaufbaus in komplexeren Experimenten wird jedoch noch durch dessen eher mäßige Effizienz limitiert und bedarf der Verbesserung, vor allem in Hinblick auf die verwendeten optischen Komponenten. Letztere verhindern bisweilen auch eine sinnvolle Nutzung des zweiten Ausgangs des Interferometers, an dem sich, zusammen mit dem ersten Output, beispielsweise Bell-Tests oder übervollständige Tomographie durchführen ließen.

Überzeugend hingegen ist die beobachtete Stabilität der Sagnac-Schleife, die durch thermische Isolierung oder zusätzliche Verminderung von Vibrationsüberträgen aus der Umgebung sogar noch verbessert werden könnte.

Das Sagnac-Interferometer stellt sich zusammenfassend als einfache und zuverlässige Möglichkeit heraus, den Hilbertraum eines Qubits (durch das Ausnutzen räumlicher Freiheitsgrade) ohne Erhöhung der Photonenzahl auf vier Dimensionen zu erweitern.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Blochkugel, Poincaré-Sphäre	4
2.2	Zustandsraum der Dichtematrizen	13
3.1	Schematische Darstellung der Versuchsanordnung.	22
3.2	Aufnahmen der Versuchsanordnung.	23
3.3	Aufnahmen der Modenstrukturen.	25
3.4	Geometrie eines Glasplättchens.	27
3.5	Intensitäten in Abhängigkeit vom Drehwinkel des Glasplättchens.	28
3.6	Fit an die Messwerte zur Bestimmung der Visibility.	29
3.7	Stabilitätsmessung am Interferometer.	31
3.8	Anschauliche Darstellung der gefitteten Dichtematrix.	35

Tabellenverzeichnis

2.1	Tomographisch vollständiger Satz von Projektionsmessungen.	18
3.1	Reflektionsverluste der einzelnen Bauteile.	32
3.2	Im Rahmen der Zustandstomographie durchgeführte Messungen.	34
3.3	Ergebnisse der Monte-Carlo Simulation.	36

Literaturverzeichnis

- [AS10] R. B. A. Adamson and A. M. Steinberg, *Improving quantum state estimation with mutually unbiased bases*, Phys. Rev. Lett. **105** (2010), 030406.
- [BBPS96] Charles H. Bennett, Herbert J. Bernstein, Sandu Popescu, and Benjamin Schumacher, *Concentrating partial entanglement by local operations*, Phys. Rev. A **53** (1996), no. 4, 2046–2052.
- [Bel] J. S. Bell, *On the einstein rosen paradox*, Physics **1**, no. 3, 195–290.
- [BZ06] Ingemar Bengtsson and Karol Życzkowski, *Geometry of quantum states - an introduction to quantum entanglement*, 1st ed., Cambridge University Press, New York, 2006.
- [EP99] Jens Eisert and Martin B. Plenio, *A comparison of entanglement measures*, Journal of Modern Optics **46** (1999), no. 1, 145–154.
- [EPR35] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. **47** (1935), no. 10, 777–780.
- [GLY⁺] Wei-Bo Gao, Chao-Yang Lu, Xing-Can Yao, Ping Xu, Otfried Guehne, Alexander Goebel, Yu-Ao Chen, Cheng-Zhi Peng, Zeng-Bing Chen, and Jian-Wei Pan, *Experimental demonstration of a hyper-entangled ten-qubit schroedinger cat state*, Nature Physics **6**.
- [GT09] Otfried Guehne and Géza Tóth, *Entanglement detection*, Physics Reports **474** (2009), no. 1-6, 1 – 75.
- [HH99] Michał Horodecki and Paweł Horodecki, *Reduction criterion of separability and limits for a class of distillation protocols*, Phys. Rev. A **59** (1999), no. 6, 4206–4216.
- [HHH00] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki, *Limits for entanglement measures*, Phys. Rev. Lett. **84** (2000), no. 9, 2014–2017.
- [JKMW01] Daniel F. V. James, Paul G. Kwiat, William J. Munro, and Andrew G. White, *Measurement of qubits*, Phys. Rev. A **64** (2001), no. 5, 052312.

- [Kie07] Nikolai Kiesel, *Experiments on multiphoton entanglement*, Ph.D. thesis, Ludwig-Maximilians-Universitaet Muenchen, 2007, Fakultae fuer Physik.
- [Kre10] Isabel Krebs, *Erzeugung und analyse von hyperentanglement mit einem michelson-interferometer*, 2010, Ludwig-Maximilians-Universitaet Muenchen, Fakultae fuer Physik.
- [Min04] Florian Mintert, *Measures and dynamics of entangled states*, Ph.D. thesis, Ludwig-Maximilians-Universitaet Muenchen, 2004, Fakultae fuer Physik.
- [NC10] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, 10th ed., Cambridge University Press, New York, 2010.
- [Per96] Asher Peres, *Separability criterion for density matrices*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996), no. 8, 1413–1415.
- [PR04] Matteo Paris and Jaroslav Rehacek, *Quantum state estimation*, 10th ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin Heidelberg, 2004.
- [PV07] Martin B. Plenio and S. Virmani, *An introduction to entanglement measures*, Quant. Inf. Comp. **7** (2007), 1.
- [Rei10] Martin Reitter, *Interferometrie mit mehreren verschaenkten qubits*, 2010, Ludwig-Maximilians-Universitaet Muenchen, Fakultae fuer Physik.
- [Sch35] E. Schroedinger, *Die gegenwaertige situation in der quantenmechanik*, Naturwissenschaften **23** (1935), 823–828, 10.1007/BF01491914.
- [Sch95] Benjamin Schumacher, *Quantum coding*, Physical Review A **51** (1995), no. 4, 2738–2747.
- [Tha05] Bernd Thaller, *Advanced visual quantum mechanics*, 9th ed., Springer Science + Business Media, Inc., New York, 2005.
- [Tro07] Pavel Trojek, *Efficient generation of photonic entanglement and multiparty quantum communication*, Ph.D. thesis, Ludwig-Maximilians-Universitaet Muenchen, 2007, Fakultae fuer Physik.
- [Uhl85] A. Uhlmann, *The transition probability for states of *-algebras*, Annalen der Physik **497** (1985), no. 4-6, 524–532.
- [Vid00] Guifré Vidal, *Entanglement monotones*, Journal of Modern Optics **47** (2000), no. 2-3, 355–376.
- [VP98] V. Vedral and M. B. Plenio, *Entanglement measures and purification procedures*, Phys. Rev. A **57** (1998), no. 3, 1619–1633.

-
- [VW02] G. Vidal and R. F. Werner, *Computable measure of entanglement*, Phys. Rev. A **65** (2002), no. 3, 032314.
- [Wer89] Reinhard F. Werner, *Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model*, Physical Review A **40** (1989), no. 8, 4277–4281.
- [Wol08] Michael M. Wolf, *Quantum information theory*, 2008.
- [Woo98] William K. Wootters, *Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits*, Phys. Rev. Lett. **80** (1998), no. 10, 2245–2248.

Danksagungen

Für die spannende und bereichernde Zeit möchte ich mich bei Christian Schwemmer, Daniel Richart, Alexander Niggebaum und Yvo Fischer bedanken. Des Weiteren gilt mein Dank Prof. Harald Weinfurter, da er mir diese Arbeit ermöglicht hat sowie erneut meinem Betreuer Christian Schwemmer, für die vielen Stunden die er in mich investiert hat.

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

München, den 01.09.2011